**Gradimir V. Milovanović**
**Milan A. Kovačević** **Miodrag M. Spalević**

# NUMERIČKA MATEMATIKA
# Zbirka rešenih problema

# Predgovor

*Ova zbirka sadrži 217 kompletno rešenih zadataka iz oblasti numeričke matematike i namenjena je prvenstveno studentima tehničkih i prirodno-matematičkih fakulteta na kojima se ova oblast izučava. Zadaci su odabrani tako da pokrivaju nastavne programe standardnih kurseva numeričke matematike. Knjiga je pisana u skladu sa udžbenicima prvopotpisanog autora:*

- *NUMERIČKA ANALIZA, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1985* (*drugo izdanje 1988, treće izdanje 1991*),
- *NUMERIČKA ANALIZA, II deo, Naučna knjiga, Beograd, 1985* (*drugo izdanje 1988, treće izdanje 1991*),
- *NUMERIČKA ANALIZA, III deo, Naučna knjiga, Beograd, 1988* (*drugo izdanje 1991*),

*i nastala je značajnom izmenom i proširenjem prethodne knjige dvojice prvopotpisanih autora koja se pod naslovom ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ NUMERIČKE ANALIZE, takođe, pojavila u izdanju Naučne knjige iz Beograda i koja je doživela tri izdanja* (*1985, 1988, 1991*).

*Celokupan rukopis ove knjige podeljen je u 8 glava i na adekvatan način prati prethodno pomenute udžbenike. U nekim interesantnim slučajevima navedene su i programske realizacije algoritama na* FORTRAN *jeziku.*

*Prva glava ima uvodni karakter i daje kratak pregled razvoja numeričke matematike u svetu i kod nas, kao i pregled važnijih visoko-kvalitetnih programskih paketa za rešavanje numeričkih problema.*

*Druga glava se odnosi na osnovne elemente numeričke matematike, gde su rešeni tipični problemi koji se odnose na analizu grešaka, rekurzivna izračunavanja i sumiranja, uključujući ortogonalne i s-ortogonalne polinome.*

*U trećoj glavi se tretiraju problemi vezani za opštu teoriju iterativnih procesa, tj. za primenu Banchovog stava o nepokretnoj tački, karakteristike iterativnih procesa i ubrzavanje konvergencije procesa.*

*Četvrta glava se bavi problemima u linearnoj algebri* (*direktni i iterativni metodi*)*, dok se u petoj glavi razmatraju nelinearne jednačine i sistemi nelinearnih jednačina. Algebarskim jednačinama je posvećeno posebno poglavlje.*

*Problemi iz interpolacije funkcija i problemi najboljih aproksimacija razmatraju se u šestoj glavi. Numeričko diferenciranje i numerička integracija su tretirani u sedmoj glavi.*

*Najzad, osma glava je posvećena problemima približnog rešavanja običnih diferencijalnih jednačina. Posebo su tretirani približni analitički metodi za Cauchyev problem, kao i numerički metodi Runge-Kutta i linearni višekoračni metodi.*

*Autori se nadaju da će ova knjiga biti od koristi ne samo studentima kojima je prvenstveno knjiga namenjena, već i svima onima koji se bave numeričkom analizom ili koriste numeričke metode u svojim istraživanjima.*

*Na kraju, autori izražavaju zahvalnost kolegi Ljubiši Kociću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta u Nišu, koji je u svojstvu recenzenta pročitao rukopis ove knjige i dao korisne sugestije.*

*Niš/Kragujevac, 20. 09. 2002.* *Autori*

# Sadržaj

**VI** G L A V A



**VII** G L A V A



**VIII** G L A V A

# I GLAVA
# Uvod

Razvoj nauke i tehnike, posebno računarske tehnike, posle drugog svetskog rata uslovio je brzi i sistematski razvoj *numeričke matematike*, koja omogućava rešavanje veoma kompleksnih problema uz pomoć računara. Naime, sposobnost računara da u realnom vremenu obavi veliki broj računskih operacija uz automatizovani proces računanja, pruža neslućene mogućnosti *numeričkoj matematici.* Na taj način niz matematičkih problema koji se klasičnim matematičkim metodima ne mogu uvek tačno rešiti ili bi njihovo rešavanje bilo necelishodno, efikasno se rešavaju korišćenjem aparata *numeričke matematike.* Programski realizovani numerički metodi (numerički softver[1)]) omogućavaju korisnicima brzo rešavanje problema sa proizvoljnom tačnošću, a da pri tome ne moraju biti eksperti u oblasti numeričke matematike. Ova okolnost ima pozitivno povratno dejstvo na razvoj novih tehnologija i razvoj nauke uopšte.

Glavni zadatak *numeričke matematike* je konstrukcija i analiza metoda (algoritama) i formiranje odgovarajućeg numeričkog softvera. Kao baza pojavljuje se posebna oblast pod nazivom *teorija aproksimacija.* Kao posebna oblast izdvaja se i *teorija optimizacija* koja tretira razne optimizacione probleme. U poslednjih nekoliko decenija sve ove oblasti su imale buran razvoj, o čemu svedoči velika produkcija naučnih rezultata koji se publikuju kroz veliki broj specijalizovanih časopisa. Navešćemo neke od tih časopisa[2)]: *Mathematics of Computation* (Američko matematičko društvo), *Numerische Mathematik*, *Constructive Approximation*, *Computing*, *Calcolo* (Springer Verlag), *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *SIAM Journal on Computing*, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, *SIAM Journal on Optimization*, *SIAM Journal on Scientific Computing* (SIAM – Društvo za industrijsku i primenjenu matematiku, SAD), *Journal Computational and Applied Mathematics*, *Applied Mathematics and Computation*, *Computers & Mathematics with Applications* (Elsevier), *Journal of Approximation Theory* (Academic Press), itd. U poslednje vreme pojavljuju se i elektronski časopisi (na

---

[1)] Na engleskom jeziku: *numerical software.*

[2)] U zagradama iza naziva časopisa navedeni su izdavači.

primer, *ETNA – Electronic Transactions on Numerical Analysis*, u izdanju Kent Univerziteta, SAD, `http://etna.mcs.kent.edu`).

Značajan napredak je učinjen i u realizaciji programskih paketa visokokvalitetnog numeričkog softvera. Pomenućemo samo neke od njih:

| | |
|---|---|
| LINPACK | (za linearne sisteme jednačina), |
| EISPACK | (za problem sopstvenih vrednosti), |
| LAPACK | (za probleme u linearnoj algebri), |
| FUNPACK | (za specijalne funkcije), |
| MINIPACK | (za nelinearne jednačine i minimizacione probleme), |
| DEPAC | (za obične diferencijalne jednačine), |
| PDEPACK | (za parcijalne diferencijalne jednačine), |
| ELLPACK | (za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine), |
| SPARSPACK | (za retke matrice). |

U vezi nekih od ovih paketa interesantno je videti knjigu: *Sources and development of mathematical software* (W.R. Cowell, ed.), Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984. Mahom programski paketi su implementirani na FORTRAN jeziku. U novije vreme postoje implementacije i na jeziku C++. Veliki broj matematičkih softverskih paketa danas se slobodno distribuira. (Neka uputstva u tom pravcu mogu se naći na adresi: `http://gams.nist.gov`).

Treba napomenuti da su se u poslednje vreme pojavili i programski sistemi kao što su:

MATLAB (The MathWorks, Inc., `http://www.mathworks.com`),
MATHEMATICA (Wolfram Research, Inc., `http://www.wolfram.com`),
MAPLE (Waterloo Maple, Inc., `http://www.maplesoft.com`), itd.

Na primer, u MATLAB-u je dobar deo prethodno pomenutog visokokvalitetnog softvera ugrađen, posebno onaj koji se odnosi na rešavanje problema u linearnoj algebri. Svi pomenuti programski sistemi predstavljaju integrisane sisteme za numerička i simbolička izračunavanja, grafičku prezentaciju i interpretaciju, i najzad pružaju takvo okruženje koje omogućava korisniku programiranje na jedan veoma jednostavan način.

Pored *numeričke matematike* u poslednje vreme značajan progres je učinjen i u *simboličkim izračunavanjima*, tako da su se za ovu namenu pojavili veoma efikasni algoritmi. Štaviše, ima i specijalizovanih časopisa koji tretiraju samo ovu problematiku, na primer, *Journal of Symbolic Computation* (Academic Press) (videti: `http://www.apnet.com/jsc`).

Na prostorima bivše Jugoslavije *numerička matematika* je počela da se ozbiljnije izučava i razvija tek od nedavno. Na većini tehničkih i prirodno–

matematičkih fakulteta, ova oblast se na redovnim i poslediplomskim studijama ozbiljnije počinje da izučava od pre dvadesetak godina. Nažalost, na nekim fakultetima ova oblast ni do danas nije uvedena u nastavni plan.

Prva knjiga iz oblasti *numeričke matematike*, koja je štampana na srpskom jeziku, bila je knjiga prevedena sa engleskog jezika:

– E. Whittaker i G. Robinson: *Tečaj numeričke matematike,* Naučna knjiga, Beograd, 1955.

Osam godina kasnije pojavljuje se i prevod poznate knjige sa ruskog jezika:

– I.S.Berezin i N.P Žitkov: *Numerička analiza – numeričke metode,* Naučna knjiga, Beograd, 1963.

Petnaestak godina kasnije pojavljuju se i prve knjige domaćih autora. Do 1980. godine pubikovane su tri knjige:

– M. Bertolino: *Numerička analiza,* Naučna knjiga, Beograd, 1977.

– G.V. Milovanović: *Numerička analiza, I deo,* Univerzitet u Nišu, Niš, 1979.

– V. Simonović: *Numeričke metode – skripta,* Mašinski fakultet, Beograd, 1979.

Nakon toga, štampan je veći broj knjiga iz numeričke matematike, uključujući i zbirke zadataka iz ove oblasti.

Najzad, napomenimo da su ove godine publikovane dve knjige koje tretiraju probleme *simboličkog izračunavanja*:

– P.S. Stanimirović i G.V. Milovanović: *Programski paket MATHEMATICA i primene*, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2002.

– G.V. Milovanović i P.S. Stanimirović: Simbolička implementacija nelinearne optimizacije, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2002.

Mada se poslednjih godina dosta forsiraju simbolička izračunavanja, ona ipak neće moći ni približno da zauzmu ono mesto koje pripada numeričkoj matematici. Korisno je, međutim, da se u problemima gde je to moguće uvode i simbolička izračunavanja u kombinaciji sa numeričkim.

U ovoj zbirci rešenih problema iz oblasti *numeričke matematike* ispoštovani su svi principi metodičkog izlaganja materije. Polazeći od jednostavnijih problema, čitalac se postepeno uvodi u probleme sa sve složenijom strukturom. Ponekad, posle rešenja zadatka daje se i spisak referenci radi eventualno šireg upoznavanja čitaoca sa izloženom problematikom. U zadacima, kada je to bilo potrebno, citirana je literatura [1], [2], [3], [4], koja se odnosi na sledeće knjige:

[1] G.V. Milovanović: *Numerička analiza, I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1985 (drugo izdanje 1988, treće izdanje 1991).

[2] G.V. Milovanović: *Numerička analiza, II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1985 (drugo izdanje 1988, treće izdanje 1991).

[3] G.V. Milovanović: *Numerička analiza, III deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1988 (drugo izdanje 1991).

[4] D.S. Mitrinović: *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972 (drugo izdanje 1975, treće izdanje 1986).

# II G L A V A

# Osnovni elementi numeričke matematike

## 2.1. Analiza grešaka, rekurzivna izračunavanja i sumiranja

**2.1.1.** Dati su sledeći brojevi:

$$63.8543, \quad 93487, \quad 0.0063945, \quad 363042, \quad 0.090038.$$

Za svaki od njih odrediti značajne cifre. Svaki od njih aproksimirati odgovarajućim brojem ša cetri značajne cifre i odrediti apsolutne i relativne greške tako dobijenih vrednosti.

**Rešenje.** Svaka cifra broja, izuzimajući nule koje služe za fiksiranje decimalne tačke, naziva se značajnom cifrom tog broja. Dakle, prvi broj ima 6, drugi 5, treći 5, četvrti 6, peti 5 značajnih cifara.

Približan broj $\overline{x}$ broja $x$ je broj koji zamenjuje tačan broj x u izračunavanjima i "neznatno" se razlikuje od njega. Odgovarajuća greška je $e = \overline{x} - x$, a apsolutna greska je $|e| = |\overline{x} - x|$.

Pod granicom apsolutne greške $\Delta_x$ približnog broja $\overline{x}$ podrazumeva se svaki broj ne manji od apsolutne greške tog broja. Dakle,

$$|e| = |\overline{x} - x| \leq \Delta_x \,,$$

pa je $x \in [\overline{x} - \Delta_x, \overline{x} + \Delta_x]$.

S obzirom da greška $e$ nedovoljno karakteriše tačnost, uvodi se i pojam relativne greške

$$r = \frac{e}{x} = \frac{\overline{x} - x}{x} \quad (x \neq 0), \tag{1}$$

kao i granica relativne greške $\varepsilon_x$ sa

$$|r| = \frac{|\overline{x} - x|}{|x|} \leq \frac{\Delta_x}{|x|} \cong \frac{\Delta_x}{|\overline{x}|} = \varepsilon_x .$$

Svaki broj $x$ može se predstaviti u normalizovanom obliku

$$x = (\pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots)\, b^k \quad (a_1 \neq 0), \tag{2}$$

gde je $b$ osnova brojnog sistema, a $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ cifre brojnog sistema $(0 \leq a_i \leq b-1)$.

Broj $\pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ zvaćemo mantisom i označavati sa $x^\star$. Broj $k$ zvaćemo karakteristikom. Dakle, možemo pisati $x = x^\star\, b^k$. Najčešće su u upotrebi binarni $(b = 2)$ i decimalni $(b = 10)$ brojni sistemi.

Po definiciji kaže se da broj $\overline{x}$ aproksimira broj $x$ sa $l$ značajnih cifara ako je $l$ najveći broj za koji $|\overline{x}^\star - x^\star|$ ne prelazi jedinicu $l$-tog mesta, tj.

$$|\overline{x}^\star - x^\star| \leq \omega\, b^{-l}, \quad \omega \in (0, 1]. \tag{3}$$

Primetimo da je broj značajnih cifara broja $\overline{x}$ u direktnoj vezi sa granicom relativne greške. Naime, ako nejednakost iz (3) pomnožimo sa $b^k$ ($k-$karakteristika brojeva $\overline{x}$ i $x$), podelimo sa $|x|$ i imamo u vidu da je $b^{-1} \leq |x^\star| < 1$, dobijamo

$$|r| = \frac{|\overline{x} - x|}{|x|} \leq \frac{\omega\, b^{k-l}}{|x|} \leq \frac{\omega\, b^{k-l}}{|x^\star|\, b^k} \leq \frac{\omega\, b^{k-l}}{b^{-1} b^k} = \omega\, b^{-l+1}, \tag{4}$$

gde je $\omega \in (0, 1]$.

Približan broj $\overline{x}$ broja $x$ se pojavljuje u izračunavanjima iz različitih razloga. Na primer, $\overline{x}$ je rezultat nekog merenja sa odgovarajućom tačnošću (bolje rečeno, netačnošću). Tada, umesto $x$ uzimamo $\overline{x}$ kako bismo izbegli izlišan numerički rad, s obzirom na tačnost rezultata koja je potrebna, ili je pak $\overline{x}$ dobijeno kao rezultat nekog predprocesiranja koje je unelo grešku.

Dalje, u praktičnim izračunavanjima koristimo računar. Za predstavljanje realnog broja u memoriji računara se obezbeđuje deo prostora. Dati broj se zapisuje u binarnom brojnom sistemu ($b = 2$, pomoću cifara 0 i 1). Najčešé se koristi normalizovan zapis broja u tzv. pokretnoj tački[3)]. Neka je za mantisu, u zapisu broja u računaru, obezbeđen prostor za znak i $n$ cifara (0 ili 1), a za karakteristiku prostor za znak i $m$ cifara (0 ili 1). Dakle, ako zanemarimo ograničenje u pogledu konačnosti broja pozicija za karakteristiku (karakteristika je ceo broj pa se on u računaru ili tačno zapisuje ili se ne može uopšte zapisati ako je broj "enormno" veliki po modulu i u tom slučaju kažemo da postoji prekoračenje kapaciteta memorijskog registra ili je broj "enormno" mali po modulu pa se on tretira u računaru kao nula), tada se svaki realan broj oblika (2), koji se dobija kao početni podatak ili kao rezultat određenih računskih operacija, zamenjuje približnim brojem oblika

$$\overline{x} = (\pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n)\, b^k \quad (a_1 \neq 0).$$

---

3) Na engleskom: *floating point*.

U ovom slučaju kažemo da imamo mantisu sa $n$ razreda.

Proces odbacivanja cifara mantise u broju $x$, počev od cifre $a_{n+1}$, naziva se prosto odsecanje. Apsolutna greska pri ovome je

$$|e| \le b^{k-n}. \tag{5}$$

Apsolutna greska koja se čini pri zameni broja $x$ brojem $\overline{x}$, može se smanjiti ako se koristi tzv. postupak zaokrugljivanja (zaokruživanja) brojeva. Taj postupak se sastoji u sledećem:

1) Ako je $a_{n+1} + a_{n+2}b^{-1} + \cdots < \dfrac{1}{2}\, b$ koristi se prosto odsecanje;

2) Ako je $a_{n+1} + a_{n+2}b^{-1} + \cdots > \dfrac{1}{2}\, b$, cifra $a_n$ se povećava za jedinicu, a cifre $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ se odbacuju;

3) Ako je $a_{n+1} + a_{n+2}b^{-1} + \cdots = \dfrac{1}{2}\, b$ ravnopravno se mogu koristiti pravila 1) i 2).

Na računski mašinama zaokrugljivanje se najčešće izvodi tako što se broju (kao rezultatu neke operacije) koji treba da se zaokruži, dodaje broj $\frac{1}{2}b^{k-n}$, a zatim se vrši prosto odsecanje. Ovo znači da se u nerešenom slučaju 3) uvek $a_n$ zamenjuje sa $a_n + 1$ (pravilo 2)).

Napomenimo da kod ručnog zaokrugljivanja brojeva u dekadnom sistemu ($b = 10$), u nerešenom slučaju preporučuje sledeće pravilo: Ako je cifra $a_n$ paran broj koristi se pravilo 1), a ako je neparan broj koristi se pravilo 2).

Apsolutna greška kod zaokrugljivanja broja je

$$|e| \le \frac{1}{2} b^{k-n}. \tag{6}$$

S obzirom da je $x = x^\star\, b^k$ i $b^{-1} \le |x^\star| < 1$, imamo

$$|r| = \frac{|e|}{|x|} \le \frac{\frac{1}{2}b^{k-n}}{|x^\star| b^k} \le \frac{\frac{1}{2}b^{k-n}}{b^{-1}b^k} = \frac{1}{2}b^{-n+1}. \tag{7}$$

Kod računara imamo $b = 2$, pa je $|r| \le 2^{-n} = \text{eps}$ i naziva se mašinska preciznost s obzirom da zavisi od mašine tj. od prostora u memoriji mašine predviđenog za broj cifara mantise ($n$) normalizovanog zapisa broja u pokretnom zareazu, dok u slučaju $b = 10$ imamo $|r| \le \frac{1}{2}10^{n-1}$.

Zadatkom se traži da se svaki od brojeva aproksimira odgovarajućim brojem sa četri značajne cifre. To možemo postići i tako što mantise datih brojeva, predstavljenih u normalizovanom obliku, svedemo na 4 cifre, bilo postupkom odsecanja, bilo postupkom zaokrugljivanja. Zaista, s obzirom da je, na osnovu (5) i

(6), $|\overline{x}^\star - x^\star| \leq \omega b^{-4}$, gde je u slučaju odsecanja $\omega = 1$, a u slučaju zaokrugljivanja $\omega = 1/2$, vidimo da važi (3) za $l = 4$.

Opredelićemo se ipak za postupak zaokrugljivanja, s ozirom na manju granicu greške. U tom slučaju možemo zaključiti, na osnovu (6) i (7) za $b = 10$ i $n = 4$, da je $|e| \leq 0.5 \cdot 10^{k-4}$ i $|r| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$. Primetimo da granica apsolutne greške zavisi od karakteristike broja, dok je granica relativne greške nezavisna od veličine broja koji zaokružujemo. Odgovarajući rezultati su:

(1) $x = 63.8543 = 0.638543 \cdot 10^2$ (sve cifre su značajne).

$\overline{x} = 0.6385 \cdot 10^2 \quad (k = 2)$.

$|e| = |0.638543 - 0.6385| \cdot 10^2 = 0.43 \cdot 10^{-2} < 0.5 \cdot 10^{-2}$,

$|r| = \dfrac{0.43 \cdot 10^{-2}}{0.638543 \cdot 10^2} \cong 0.67 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

(2) $x = 93487 = 0.93487 \cdot 10^5$ (sve cifre su značajne).

$\overline{x} = 0.9349 \cdot 10^5 \quad (k = 5)$.

$|e| = |0.93487 - 0.9349| \cdot 10^5 = 0.3 \cdot 10^1 < 0.5 \cdot 10^1$,

$|r| = \dfrac{0.3 \cdot 10^1}{0.93487 \cdot 10^5} \cong 0.32 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

(3) $x = 0.0063945 = 0.63945 \cdot 10^{-2}$ (značajne cifre su $6, 3, 9, 4, 5$).

$\overline{x} = 0.6394 \cdot 10^{-2} \quad (k = -2)$.

$|e| = |0.6394 - 0.63945| \cdot 10^{-2} = 0.5 \cdot 10^{-6} \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$,

$|r| = \dfrac{0.5 \cdot 10^{-6}}{0.63945 \cdot 10^{-2}} \cong 0.78 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

(4) $x = 363042 = 0.363042 \cdot 10^6$ (sve cifre su značajne).

$\overline{x} = 0.3630 \cdot 10^6 \quad (k = 6)$.

$|e| = |0.3630 - 0.363042| \cdot 10^6 = 0.42 \cdot 10^2 < 0.5 \cdot 10^2$,

$|r| = \dfrac{0.42 \cdot 10^2}{0.363042 \cdot 10^6} \cong 0.12 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

(5) $x = 0.090038 = 0.90038 \cdot 10^{-1}$ (značajne cifre su $9, 0, 0, 3, 8$).

$\overline{x} = 0.9004 \cdot 10^{-1} \quad (k = -1)$.

$|e| = |0.9004 - 0.90038| \cdot 10^{-1} = 0.2 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-5}$,

$|r| = \dfrac{0.2 \cdot 10^{-5}}{0.90038 \cdot 10^{-1}} \cong 0.22 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

**2.1.2.** Odrediti granicu relativnih grešaka sa kojom treba aproksimirati brojeve $x_1, x_2$ brojevima $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ tako da $x_1 \neq x_2$ povlači $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$.

**Rešenje.** Neka su $r_i$ $(i = 1, 2)$ odgovarajuće relativne greške, tj.

$$r_i = \frac{\overline{x}_i - x_i}{x_i} \quad (i = 1, 2)$$

i neka je njihova granica $r$ $(|r_i| \le r,\ i = 1, 2)$. Tada, korišćenjem dobro poznate nejednakosti $|a - b| \ge |a| - |b|$ $(a, b \in \mathbb{R})$ i nejednakosti trougla, dobijamo

$$\begin{aligned} |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| &= |x_1(1 + r_1) - x_2(1 + r_2)| \\ &= |x_1 - x_2 + x_1 r_1 - x_2 r_2| \\ &\ge |x_1 - x_2| - |x_1 r_1 - x_2 r_2| \\ &\ge |x_1 - x_2| - (|x_1|\,|r_1| + |x_2|\,|r_2|) \\ &\ge |x_1 - x_2| - (|x_1| + |x_2|)r. \end{aligned}$$

Ako nametnemo uslov da je desna strana prethodne nejednakosti pozitivna, onda će i $|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| > 0$, pa je, dakle, $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$. Tako dobijamo

$$|x_1 - x_2| - (|x_1| + |x_2|)r > 0,$$

tj.

$$r < \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\,.$$

Dakle, granica relativnih grešaka $r$ treba da bude manja od $\overline{r}$, gde je

$$\overline{r} = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\,.$$

**2.1.3.** Zaokruživanjem brojeva $y_1$ i $y_2$ dobijeni su brojevi $\overline{y}_1 = 2.78493$ i $\overline{y}_2 = 2.78469$. Oceniti apsolutnu i relativnu grešku njihove razlike $\overline{u} = \overline{y}_1 - \overline{y}_2$ i analizirati problem gubitka značajnih cifara.

**Rešenje.** S ozirom da su brojevi $\overline{y}_1 = 2.78493$ i $\overline{y}_2 = 2.78469$ nastali zaokruživanjem brojeva $y_1$ i $y_2$ oni aproksimiraju brojeve $y_1$ i $y_2$ sa 6 značajnih cifara i za apsolutne greške važi (videti (6) u zadatku 2.1.1)

$$(1) \qquad |\overline{y}_i - y_i| \le 0.5 \cdot 10^{-5}, \quad i = 1, 2,$$

a za relativne greške

$$\frac{|\overline{y}_i - y_i|}{|y_i|} \cong \frac{|\overline{y}_i - y_i|}{|\overline{y}_i|} \le 0.18 \cdot 10^{-5}, \quad i = 1, 2.$$

Za apsolutnu grešku razlike brojeva sada imamo

$$|\overline{u}-u| = |(\overline{y}_1-\overline{y}_2)-(y_1-y_2)| = |(\overline{y}_1-y_1)-(\overline{y}_2-y_2)| \leq |\overline{y}_1-y_1|+|\overline{y}_2-y_2| = 10^{-5}.$$

S ozirom da je

$$\overline{u} = \overline{y}_1 - \overline{y}_2 = 0.00024,$$

za relativnu grešku razlike imamo

$$\frac{|\overline{u}-u|}{|u|} \cong \frac{|\overline{u}-u|}{|\overline{u}|} \leq \frac{10^{-5}}{24 \cdot 10^{-5}} \cong 0.42 \cdot 10^{-1},$$

pa imajući u vidu (4) iz zadatka 2.1.1, zaključujemo da $\overline{u} = 0.24 \cdot 10^{-3}$ aproksimira tačnu vrednost $u = y_1 - y_2$ sa dve značajne cifre.

Dakle, pri oduzimanju približno istih brojeva, došlo je do "gubitka" značajnih cifara (operandi su imali po 6 značajnih cifara, a rezultat ima samo dve značajne cifre). Naravno, s ozirom da je broj značajnih cifara povezan sa granicom relativne greške (videti (4) iz zadatka 2.1.1) to u stvari znači da je došlo do povećanja granice relativne greške (sa $10^{-5}$ na $10^{-1}$). To je i logično s obzirom da je pri oduzimanju priblizno istih brojeva rezultat daleko manji od svakog od operanada ponaosob, naravno, posmatrano po modulu.

Može se pokazati (videti [1, str. 21–23]) da nema gubitka značajnih cifara kod ostalih računskih operacija (sabiranja, množenja i deljenja).

**2.1.4.** Odrediti granicu apsolutne i relativne greške približne vrednosti funkcije

$$f = \frac{x^2 + y\sqrt{z}}{x + 2y}$$

ako se izračunava na računskoj mašini koja radi sa mnogo većom tačnošću nego što je tačnost zaokruženih približnih vrednosti argumenata

$$\overline{x} = 1.24, \quad \overline{y} = 0.66, \quad \overline{z} = 1.96.$$

**Rešenje.** Neka su

$$e_x = \overline{x} - x, \quad e_y = \overline{y} - y, \quad e_z = \overline{z} - z$$

greške argumenata, a odgovarajuće relativne greške

$$r_x = \frac{e_x}{x}, \quad r_y = \frac{e_y}{y}, \quad r_z = \frac{e_z}{z}. \tag{1}$$

S ozirom da su približne vrednosti argumenata nastale zaokruživanjem tačnih, imamo

$$
(2) \qquad |e_x| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}, \quad |e_y| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}, \quad |e_z| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}.
$$

Sva izračunavanja na računskoj mašini se sastoje iz konačnog broja elementarnih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje). Izračunavanje $u = \sqrt{z}$, koje se pojavljuje pri izračunavanju funkcije $f$ se takođe, u računskoj mašini odvija preko elementarnih operacija (po određenom postupku – algoritmu), pri čemu totalnu relativnu grešku za izračunavanje $\overline{u} = \sqrt{\overline{z}}$, koja nastaje kao posledica toga što na mesto tačne vrednosti $z$ u izračunavanje ulazi približna vrednost $\overline{z}$, kao i greške koju unosi algoritam po kome se izračunava koren $\sqrt{\ }$ od zadatog argumenta[4)], možemo predstaviti pomoću

$$
r_u^T = \frac{1}{2} r_z + r,
$$

gde je $r_z$ relativna greška približnog broja $\overline{z}$ koji ulazi u izračunavanje na mesto stvarne vrednosti $z$, a $r$ je greška koju možemo smatrati ekvivalentom relativnoj mašinskoj greški (videti [1. str. 16]).

Sada, graf greške (videti [1. str.11–16]) za izračunavanje izraza

$$
\overline{f} = \frac{\overline{x}^2 + \overline{y}\sqrt{\overline{z}}}{\overline{x} + 2\overline{y}}
$$

na računskoj mašini, izgleda kao na slici 1, pri čemu su relativne mašinske greške odgovarajućih operacija označene sa $r_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Na osnovu grafa dobijamo totalnu relativnu grešku izraza $\overline{f}$:

$$
\begin{aligned}
r_f^T = 1 \cdot \Big\{ & \frac{x^2}{x^2 + y\sqrt{z}} (1 \cdot r_x + 1 \cdot r_x + r_1) + \frac{y\sqrt{z}}{x^2 + y\sqrt{z}} \left[ 1 \cdot \left( \frac{1}{2} r_z + r_2 \right) \right. \\
& \left. + \ 1 \cdot r_y + r_3 \right] + r_4 \Big\} + (-1) \cdot \left[ \frac{2y}{x + 2y} (r_y + r_5) + \frac{x}{x + 2y} r_x + r_6 \right] + r_7.
\end{aligned}
$$

S obzirom na uslove zadatka možemo smatrati da su relativne mašinske greške $r_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$ zanemarljive u odnosu na greške $r_x$, $r_y$ i $r_z$, pa ćemo uzeti da su $r_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Time praktično isključujemo uticaj računske mašine na totalnu grešku u krajnjem rezultatu, tj. isključujemo uticaj greške zaokrugljivanja međurezultata, koja se neminovno pojavljuje s obzirom da računar radi sa brojevima sa konačnom mantisom (videti zadatak 2.1.1). Naravno, u ovom slučaju je to opravdano jer je tačnost mašine mnogo veća od tačnosti početnih podataka. Dakle, dobićemo grešku koja je posledica približnih vrednosti početnih podataka.

---

[4)] Algoritam se tako definiše da on čini grešku na nivou mašinske greške.

Na osnovu prethodnog, nalazimo

$$
\text{(3)}\qquad r_f^T = \left(\frac{2x^2}{x^2+y\sqrt{z}} - \frac{x}{x+2y}\right) r_x + \left(\frac{y\sqrt{z}}{x^2+y\sqrt{z}} - \frac{2y}{x+2y}\right) r_y + \frac{y\sqrt{z}}{2(x^2+y\sqrt{z})}\, r_z .
$$

S obzirom da je

$$
r_f^T = \frac{\overline{f}-f}{f} = \frac{e_f^T}{f}
$$

i imajući u vidu (1), na osnovu (3) dobijamo

$$
e_f^T = f\cdot r_f^T = a_x\cdot e_x + a_y\cdot e_y + a_z\cdot e_z,
$$

gde su

$$
\text{(4)}\qquad a_x = \frac{x^2+4xy-y\sqrt{z}}{(x+2y)^2},\quad a_y = \frac{x(\sqrt{z}-2x)}{(x+2y)^2},\quad a_z = \frac{y}{2\sqrt{z}(x+y)} .
$$

Dalje je, s obzirom na (2),

$$
\text{(5)}\qquad |e_f^T| \le |a_x||e_x| + |a_y||e_y| + |a_z||e_z| \le (|a_x|+|a_y|+|a_y|)\cdot 0.5\cdot 10^{-2}.
$$

Vrednosti $a_x$, $a_y$ i $a_z$ možemo približno izračunati tako što u (4) na mesto vrednosti $x$, $y$, $z$ uzmemo $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, pa imamo

$$
|a_x| \le 0.5932,\quad |a_y| \le 0.2044,\quad |a_z| \le 0.0921,
$$

a dalje, na osnovu (5),

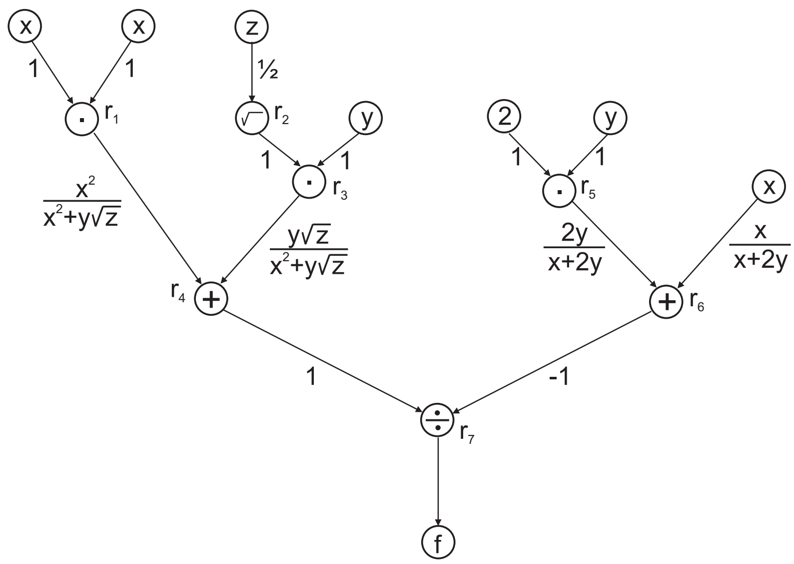
$$
|e_f^T| \le 0.8897\cdot 0.5\cdot 10^{-2} \le 0.45\cdot 10^{-2}.
$$

S obzirom da je $\overline{f} = 0.9615625$, sada je

$$
|r_f^T| = \frac{|e_f^T|}{f} \cong \frac{|e_f^T|}{\overline{f}} \le \frac{0.45\cdot 10^{-2}}{0.9615625} \le 0.468\cdot 10^{-2} \le 0.47\%.
$$

Primetimo da ako bismo $\overline{f} = 0.9615625$ zaokružili na tri decimala, tj. umesto $f$ uzeli približnu vrednost $\overline{\overline{f}} = 0.962$ ne bismo značajno povećali granicu apsolutne, a samim tim, i relativne greške. Naime, tada je

$$
|\overline{\overline{f}} - f| \le |\overline{\overline{f}} - \overline{f}| + |\overline{f} - f| \le 0.5\cdot 10^{-3} + 0.45\cdot 10^{-2} = 0.5\cdot 10^{-2},
$$




Sl. 1.

$$\frac{|\overline{\overline{f}} - f|}{|f|} \cong \frac{|\overline{\overline{f}} - f|}{|\overline{f}|} \le \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{0.9615625} \le 0.52 \cdot 10^{-2} = 0.52\%.$$

**2.1.5.** Moment inercije valjka poluprečnika osnove $r$ i mase $m$ izračunava se po obrascu

$$J = \frac{m\,r^2}{2}.$$

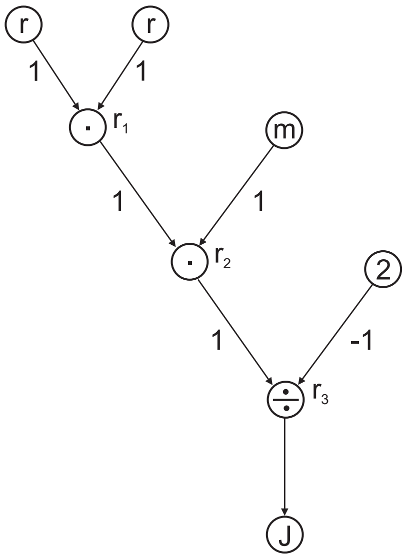
Ako su $m$ i $r$ sa približnim vrednostima $\overline{m} = 500\,g$ i $\overline{r} = 10\,cm$, sa kakvim granicama apsolutnih grešaka treba da budu određene ove veličine, ako zahtevamo da su odgovarajuće granice relativnih grešaka jednake, da bi moment inercije bio određen s granicom relativne greške od 3% ?

**Rešenje.** Označimo sa

$$r_r = \frac{\overline{r} - r}{r} \cong \frac{\overline{r} - r}{\overline{r}}, \quad r_m = \frac{\overline{m} - m}{m} \cong \frac{\overline{m} - m}{\overline{m}}$$

i neka je $R$ granica ovih relativnih grešaka (ona je ista prema uslovu zadatka), tj.

$$|r_r| \cong \frac{|\overline{r} - r|}{\overline{r}} \le R, \quad |r_m| \cong \frac{|\overline{m} - m|}{\overline{m}} \le R. \tag{1}$$




Sl. 1.

Ako približnu vrednost $\overline{J} = \overline{mr}^2/2$ izračunavamo na računskoj mašini (kalkulatoru, računaru) sa mnogo većom tačnošću nego što je tačnost početnih podataka, tada je na osnovu grafa greške sa slike 1 (relativne mašinske greške $r_1$, $r_2$ i $r_3$ odgovarajućih operacija smo uzeli da su zanemarljive, tj. $r_i = 0$, $i = 1, 2, 3$), relativna greška za ovako izračunato $\overline{J}$ je data sa

$$r_J^T = \frac{\overline{J} - J}{J} = 1 \cdot (1 \cdot r_r + 1 \cdot r_r) + r_m = 2r_r + r_m,$$

tj. na osnovu uslova u zadatku,

$$|r_J^T| \leq 2|r_r| + |r_m| \leq 3R \leq 3\% = 0.03\,,$$

pa je

$$R \leq \frac{0.03}{3} = 0.01\,.$$

Poslednji uslov je ispunjen, na primer za $R = 0.01$. Sada, na osnovu (1), dobijamo

$$|\overline{m} - m| \leq |\overline{m}| \cdot 0.01 = 500\,g \cdot 0.01 = 5\,g,$$
$$|\overline{r} - r| \leq |\overline{r}| \cdot 0.01 = 10\,cm \cdot 0.01 = 0.1\,cm.$$

Dakle masa valjka treba da bude izmerena sa tačnošću do na $5\,g$, a poluprečnik do na milimetar.

**2.1.6.** Izvršiti analizu greške kod izračunavanja zbira

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \tag{1}$$

na računskoj mašini, pri čemu je $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Šta se može reći u slučaju kad su dati brojevi bliski, tj. $x_i = x_0 + \delta_i,\ \delta_i \ll x_0\ (i = 1, 2, 3, 4)$?

**Rešenje.** Jednostavnosti radi, pretpostavimo da su brojevi $x_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ zadati tačno, pa su njihove relativne greške $r_{x_i} = 0\,(i = 1, 2, 3, 4)$. Neka su relativne mašinske greške posle svake operacije sabiranja redom $r_1, r_2, r_3$. Na osnovu grafa računskog postupka (1) koji je dat je na slici 1, dobijamo redom

$$r^T_{x_1+x_2} = r_1, \qquad r^T_{x_1+x_2+x_3} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3} r_1 + r_2,$$

$$r^T_y = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \left( \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3} r_1 + r_2 \right) + r_3\,,$$

odakle je

$$e^T_y = y \cdot r^T_y = (x_1 + x_2)r_1 + (x_1 + x_2 + x_3)r_2 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)r_3\,. \tag{2}$$

Ako je granica relativne mašinske greške r, tj. ako važi

$$|r_i| \le r \qquad (i = 1, 2, 3),$$

iz (2) sleduje

$$|e^T_y| = (3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)\, r\,,$$

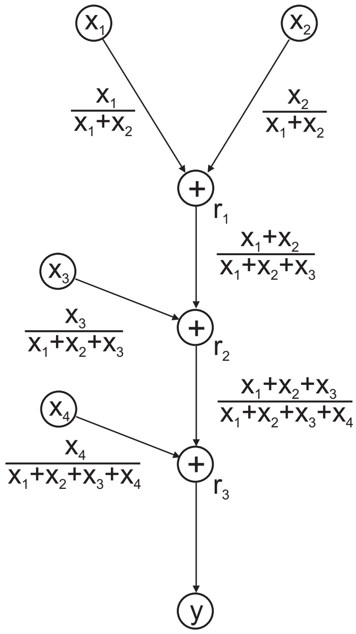
odakle zaključujemo da je granica apsolutne greške rezultata $y$ minimalna ukoliko se sabiranje izvodi polazeći od najmanjih brojeva.

Slično se može pokazati da kod sabiranja $m$ pozitivnih brojeva $x_1, \ldots, x_m$ važi ocena

$$e^T_y = [(m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 + \cdots + 2x_{m-1} + x_m]\, r\,.$$

Neka su sada brojevi $x_1, x_2, x_3, x_4$ pozitivni i bliski po vrednostima, tj. $x_i = x_0 + \delta_i,\ |\delta_i| \ll x_0\ (i = 1, 2, 3, 4)$. Korišćenjem gore dobijenih rezultata, zaključujemo da je

$$|e^T_y| \le (9x_0 + 3|\delta_1| + 3|\delta_2| + 2|\delta_3| + |\delta_4|)\, r\,,$$




Sl. 1.

tj.

$$|e_y^T| \leq 9x_0 \cdot r\,,$$

s obzirom na pretpostavku $|\delta_i| \ll x_0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Izmenimo sada redosled izračunavanja. Naime, neka je

$$y' = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4).$$

Na osnovu grafa sa slike 2. imamo

$$r_{y'}^T = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}\, r_1 + \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}\, r_2 + r_3\,,$$

odakle je

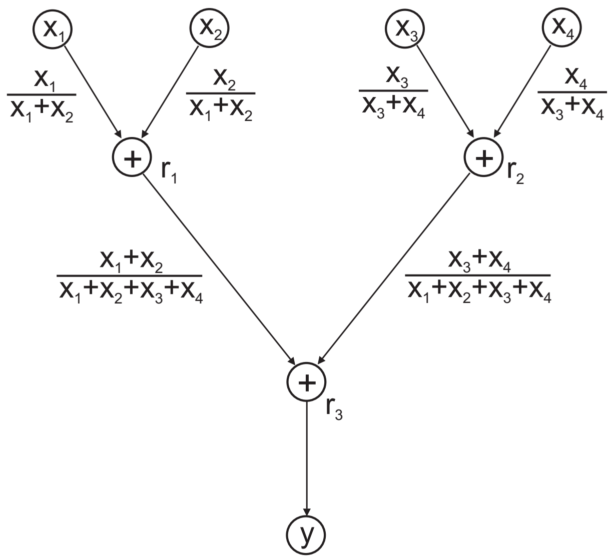
$$|e_{y'}^T| \leq (2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4)\, r\,,$$

tj.

$$|e_{y'}^T| \leq 8x_0 \cdot r\,.$$

Dakle, na ovaj način se smanjuje granica apsolutne greške zbira četiri bliska pozitivna broja.

U opštem slučaju, ako imamo $m^2$ pozitivnih brojeva, približno jednakih po veličini, koje treba sabrati, granica apsolutne greške biće utoliko manja ukoliko brojeve




Sl. 2.

grupišemo u $m$ grupa po $m$ brojeva i sabiramo brojeve u okviru svake grupe, a zatim sabiramo dobijene zbirove.

**2.1.7.** Data je kvadratna jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

gde su svi koeficijenti pozitivni, zadati tačno i $b^2 \gg 4ac$. Koja je od formula za izračunavanje jednog od korena kvadratne jednačine

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

ili

$$x_1' = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\,, \tag{2}$$

pogodnija sa stanovišta tačnijeg izračunavanja na računskoj mašini?

**Rešenje.** Formule (1) i (2) su, matematički posmatrano, identične ($x_1 \equiv x_1'$), no pri izračunavanju na računskoj mašini rezultat ne mora biti isti. To je posledica takozvanih pseudoaritmetičkih operacija koje se izvršavaju u računskoj mašini.

Kao što je poznato, svako konkrentno izračunavanje na računskoj mašini se sastoji iz konačnog broja elementarnih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje), a u formulama (1) i (2) se pojavljuje i unarna operacija korenovanja. Međutim, ova činjenica ne utiče na mogućnost analize greške. Naime, pri izračunavanju vrednosti $u = \sqrt{x}$ na računskoj mašini, totalnu relativnu grešku $r_u^T$ možemo predstaviti pomoću

$$r_u^T = \frac{1}{2} r_x + r_1 \,,$$

gde je $r_x$ relativna greška približnog broja $\bar{x}$ koji ulazi u izračunavanje na mesto stvarne vrednosti $x$, a $r_1$ je greška koju možemo smatrati ekvivalentnom relativnoj mašinskoj greški (videti [1, str. 16]).

Ako relativne mašinske greške odgovarajućih operacija označimo sa $r_{1i}$ $(i = 1, \ldots, 8)$, graf računskog postupka za formulu (1) je dat na slici 1.

Na osnovu grafa dobijamo totalnu relativnu grešku

$$r_{x_1}^T = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{b^2}{b^2-4ac} r_{11} - \frac{4ac}{b^2-4ac} (r_{12}+r_{13}) + r_{14} \right] + r_{15} \right\} + r_{16} - r_{17} + r_{18} \,,$$

s obzirom da su relativne greške operanada $r_a = r_b = r_c = 0$ ($a$, $b$ i $c$ su zadati tačno).

Kako je, prema uslovu zadatka, $b^2 \gg 4ac$ to je

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{-4ac} \approx \frac{b^2}{-2ac} \,,$$

$$\frac{b^2}{b^2-4ac} \approx 1 \,, \qquad \frac{4ac}{b^2-4ac} \approx 0 \,,$$

što daje

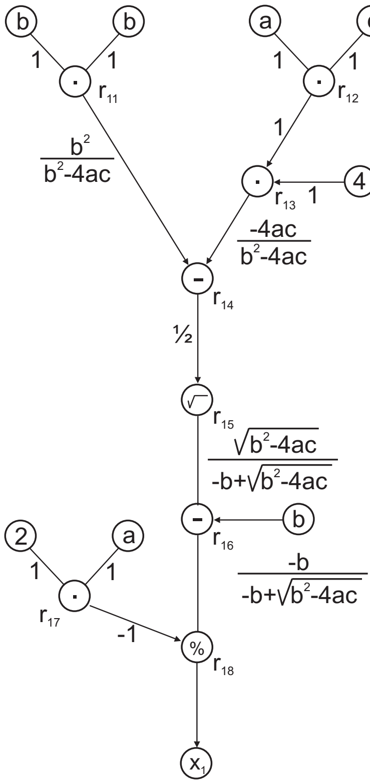
$$\left| r_{x_1}^T \right| \le \frac{b^2}{2ac} \left( \frac{|r_{11}|+|r_{14}|}{2} + |r_{15}| \right) + |r_{16}| + |r_{17}| + |r_{18}| \,. \tag{3}$$

Ako je granica relativne mašinske greške $r$, tj. ako važi

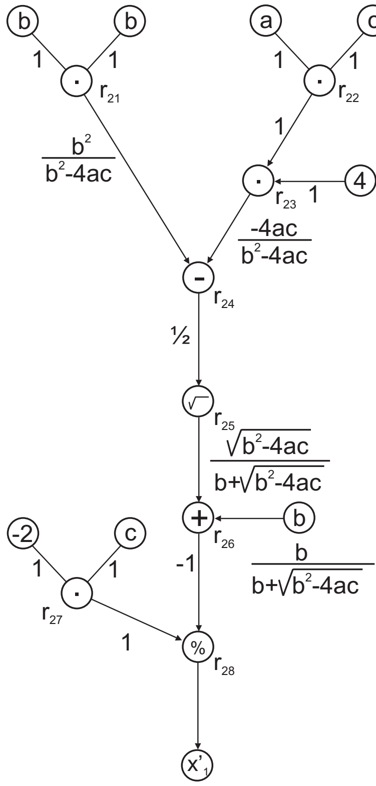
$$|r_{1i}| \le r \qquad (i = 1, \ldots, 8) \,,$$

tada na osnovu (3), imamo

$$\left| r_{x_1}^T \right| \le \left( \frac{b^2}{ac} + 3 \right) r \,. \tag{4}$$




Sl. 1




Sl. 2.

Graf računskog postupka za formulu (2) je dat na slici 2, gde su $r_{2i}$ $(i = 1, \ldots, 8)$ relativne mašinske greške odgovarajućih operacija. Na osnovu grafa dobijamo totalnu relativnu grešku vrednosti $x_1'$,

$$r^T_{x_1'} = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{b^2}{b^2-4ac}\, r_{21} - \frac{4ac}{b^2-4ac}\,(r_{22}+r_{23}) + r_{24} \right] + r_{25} \right\}$$
$$- r_{26} + r_{27} + r_{28}\,.$$

S obzirom da je $b^2 \gg 4ac$, imamo

$$\left| r^T_{x_1'} \right| \le \frac{1}{2} \left( \frac{|r_{21}| + |r_{24}|}{2} + |r_{25}| \right) + |r_{26}| + |r_{27}| + |r_{28}|$$

a dalje, ako važi $|r_{2i}| \le r$ $(i = 1, \ldots, 8)$, dobijamo

(5) $$\left| r^T_{x_1'} \right| \le 4r\,.$$

Ako uporedimo nejednakosti (4) i (5), s obzirom na uslov $b^2 \gg 4ac$, zaključujemo da možemo očekivati mnogo veću grešku pri izračunavanju po formuli (1), nego po formuli (2) pa je, dakle, formula (2), pri ovakvim uslovima, "tačnija" sa stanovišta izračunavanja u aritmetici konačne dužine na računskoj mašini.

Do ovakvog zaključka smo mogli doći i logičkim razmatranjem formula (1) i (2). Naime, brojilac u formuli (1) je blizak nuli s obzirom da je $b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ ($b^2 \gg 4ac$). To dalje znači da greška koja se javlja pri izračunavanju vrednosti $\sqrt{b^2 - 4ac}$ izaziva veliku relativnu grešku brojioca, a dalje, i vrednosti $x_1$. U formuli (2) je to izbegnuto s obzirom da je u imeniocu formiran zbir $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, te greška pri izračunavanju vrednosti $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ne izaziva veliku relativnu grešku imenioca s obzirom da je on relativno veliki. Dakle, možemo reći da u formuli (1) mala greška pri izračunavanju vrednosti $\sqrt{b^2 - 4ac}$ izaziva veliku grešku izlaznog rezultata $x_1$. Za formulu (1) možemo kazati, rečnikom numeričke analize, da je "slabo uslovljena". Analogno, za formulu (2) kažemo da je "dobro uslovljena".

**2.1.8.** Neka $\mathbb{R}^\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) označava $\ell$-dimenzionalni (realni) vektorski prostor. Ako je zadat problem $P$ pomoću preslikavanja $\boldsymbol{f}$,

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

gde je ulaz dat u obliku vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, a izlaz u obliku vektora $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, analizirati rešavanje problema $P$ pomoću računara (tj. u prisustvu aritmetike konačne dužine) i proceniti granicu totalne greške dobijenog rešenja.

**Rešenje.** Zadati problem $P$ se može predstaviti "crnom kutijom" sa odgovarajućim ulazom i izlazom u obliku

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boxed{\;P\;} \longrightarrow \boldsymbol{y}\,,$$

pri čemu $P$ privhavata ulazni vektor $\boldsymbol{x}$, rešava zadati problem i, najzad, daje rešenje u obliku vektora $\boldsymbol{y}$.

Analiziraćemo najpre kako će se mala promena ulaza ($\boldsymbol{x}$) odraziti na promenu izlaza ($\boldsymbol{y}$). Drugim rečima, pokušajmo da ustanovimo osetljivost preslikavanja $\boldsymbol{f}$ u nekoj datoj tački $\boldsymbol{x}$ na male promene $\boldsymbol{x}$. Stepen te osetljivosti iskazujemo jednim brojem kojeg nazivamo *faktor uslovljenosti* ili *kondicioni broj* preslikavanja $\boldsymbol{f}$ u tački $\boldsymbol{x}$, u oznaci $(\mathrm{cond}\, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$. Pri tome, za sada, pretpostavljamo da se funkcija $\boldsymbol{f}$ izračunava tačno, tj. sa beskonačnom preciznošću (aritmetika beskonačne dužine). Dakle, uslovljenost funkcije $f$ je njeno lokalno svojstvo koje ne zavisi od algoritama kojim se ona realizuje (izračunava).

Kako su koordinate prostora $\mathbb{R}^\ell$ realni brojevi, za njihovo predstavljanje u memoriji računara se obezbeđuje deo prostora kako je to rečeno u zadataku 2.1.1.

Naime, dati realni broj se zapisuje u binarnom sistemu (sa osnovom 2, pomoću cifara 0 i 1), pri čemu se koristi normalizovani zapis broja u pokretnoj tački. Neka je za mantisu u zapisu datog broja obezbeđen prostor za znak i $t$ binarnih cifara (0 ili 1), a za karakteristiku prostor za $s$ cifara (0 ili 1). Tada ćemo skup svih realnih brojeva koji se tačno mogu predstaviti u računaru označiti sa $\mathbb{R}(t,s)$. Taj skup je, jasno, podskup skupa $\mathbb{R}$. Nije svaki realan broj mašinski reprezentabilan, za razliku od brojeva iz skupa $\mathbb{R}(t,s)$. Naime, brojevi iz skupa $\mathbb{R}(t,s)$ su konačne dužine i ima ih konačno mnogo i predstavljaju pravi podskup skupa realnih brojeva. Na primer, broj $\sqrt{2}$ nije mašinski reprezentabilan jer ima beskonačni decimalni zapis i kao takav ne može se tačno zapisati u računaru. Slična je situacija sa mnogim drugim realnim brojevima koji se zbog toga u memoriji računara predstavljaju tako što se vrši njihovo zaokrugljivanje. Pri tome su apsolutne vrednosti relativnih grešaka zaokrugljivanja $\le 2^{-t} = \text{eps}$, gde veličina eps zavisi od mašine i naziva se mašinskom preciznošću (videti zadatak 2.1.1). Može se desiti čak da i brojevi koji imaju konačan decimalni zapis u dekadnom brojnom sistemu nisu mašinski reprezentabilni jer njihov decimalni zapis u binarnom brojnom sistemu nije konačan. Na primer, dekadni broj 0.2 ima u binarnom brojnom sistemu zapis $0.0011\overline{0011}\ldots$ .

Dakle, u izračunavanju na računskoj mašini, često smo u situaciji da se na mesto vektora $\boldsymbol{x}$ u izračunavanju pojavljuje njemu "blizak" vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$, gde je $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}$ i štaviše, rastojanje $\|\boldsymbol{\delta}\|$ od $\boldsymbol{x}$ do $\overline{\boldsymbol{x}}$ možemo oceniti pomoću izraza u kome figuriše mašinska preciznost. Ovo, naravno, pri tačnom izračunavanju funkcije $\boldsymbol{f}$, dovodi, ne do vrednosti $\boldsymbol{y}$, nego do $\overline{\boldsymbol{y}}$, tj. $\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$. Ako, pak, znamo kako preslikvanje $\boldsymbol{f}$ reaguje na male promene ulaza, takve kao što je $\boldsymbol{\delta}$, možemo reći nešto o greški $\overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}$ u rešenju $\overline{\boldsymbol{y}}$, koja je uzrokovana tom promenom. Analiziraćemo sada posebno faktor uslovljenosti preslikavanja $\boldsymbol{f}$, kao i uslovljenost samog algoritma.

*Faktor uslovljenosti preslikavanja* $\boldsymbol{f}$. Startovaćemo sa najprostijim slučajem funkcije jedne realne promenljive. Dakle, uzmimo $m = n = 1$, tj. $y = f(x)$.

Pretpostavimo, najpre, da su $x \neq 0$, $y \neq 0$. Sa $\Delta x$ označimo male promene od $x$. Pod pretpostavkom da je funkcija $f$ diferencijabilna u tački $x$, korišćenjem Taylorove formule, za odgovarajuću promenu $\Delta y$ imamo

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

S obzirom da nas interesuju relativne greške, formulu (2) predstavimo u obliku

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{x f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\Delta x}{x}\,. \tag{3}$$

Ova približna jednakost postaje (tačna) jednakost ako je $f$ linearna funkcija ili u graničnom slučaju kada $\Delta x \to 0$. Ovo sugeriše definisanje uslovljenosti preslikavanja $f$ u $x$ pomoću

$$(\operatorname{cond} f)(x) := \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| . \tag{4}$$

Ovaj broj, koji smo nazvali faktor uslovljenosti ili kondicioni broj, pokazuje nam koliko puta je veća relativna promena $y$ u odnosu na relativnu promenu $x$. Što je ovaj broj veći kažemo da je problem (1) slabije uslovljen. Obrnuto, što je on manji to je problem (1) bolje uslovljen.

U slučaju kada je $x = 0$, a $y \neq 0$, faktor uslovljenosti definišemo sa $|f'(x)/f(x)|$. Slično, za $y = 0$, $x \neq 0$, faktor uslovljenosti je $|xf'(x)|$. Ako je $x = y = 0$, korišćenjem (2), faktor uslovljenosti bi bio $|f'(x)|$.

Analizirajmo sada slučaj kada su $m$ i $n$ proizvoljni. Tada imamo

$$\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_m]^\top \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{y} = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^\top \in \mathbb{R}^n$$

Preslikavanje $\boldsymbol{f}$ predstavljamo preko koordinata (komponenti)

$$y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Ovde pretpostavljamo da svaka funkcija $f_\nu$ ima parcijalne izvode u odnosu na $m$ promenljivih u tački $\boldsymbol{x}$. Ako imamo promenu u komponenti $x_\mu$ u funkciji (5), a na osnovu (4), promena se može okarakterisati vrednostima koje definišemo sa

$$\gamma_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}) := (\operatorname{cond} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) := \left| \frac{x_\mu \dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}}{f_\nu(\boldsymbol{x})} \right|. \tag{6}$$

Ovim dobijamo kompletnu matricu faktora uslovljenosti $\Gamma(\boldsymbol{x}) = [\gamma_{\nu\mu}(\boldsymbol{x})] \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$. Da bismo dobili jedinstven faktor uslovljenosti, možemo uzeti neku pogodnu meru "odstupanja" matrice $\Gamma(\boldsymbol{x})$ kakva je, na primer, norma matrice definisana kasnije u (9),

$$(\operatorname{cond} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \|\Gamma(\boldsymbol{x})\|, \quad \Gamma(\boldsymbol{x}) = [\gamma_{\nu\mu}(\boldsymbol{x})]. \tag{7}$$

Uslovljenost definisana na ovaj način, naravno, zavisi od norme, ali red odstupanja mogao bi biti manje-više isti za bilo koju razumnu normu.

Ako su komponente od $\boldsymbol{x}$ ili od $\boldsymbol{y}$ jednake nuli, (6) se modifikuje na isti način kako je to prethodno urađeno za jednodimenzionalni slučaj.

Nešto grublja analiza, slična onoj za jednodimenzionalni slučaj, može se izvesti definisanjem relativne promene $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ pomoću

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}}, \quad \Delta \boldsymbol{x} = [\Delta x_1\ \Delta x_2\ \cdots\ \Delta x_m]^\top,$$

gde je $\Delta \boldsymbol{x}$ promena vektora, čije komponente $\Delta x_\mu$ su promene komponenti $x_\mu$, i gde je $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ neka norma vektora u $\mathbb{R}^m$. Za promenu $\Delta \boldsymbol{y}$ prouzrokovanu sa $\Delta \boldsymbol{x}$, slično se definiše relativna promena $\|\Delta \boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n}/\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n}$, sa podesnom vektorskom normom $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ u $\mathbb{R}^n$. Onda je cilj uporediti relativne promene za $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$.

Da bismo to izveli, potrebno je definisati matričnu normu za matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Izaberimo takozvanu "operatorsku normu",

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} := \max_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}}\,.$$

Na dalje, uzećemo za vektorske norme "uniformnu" (ili beskonačnu) normu,

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m} = \max_{1\le\mu\le m} |x_\mu| =: \|\boldsymbol{x}\|_\infty, \quad \|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{1\le\nu\le n} |y_\nu| =: \|\boldsymbol{y}\|_\infty\,. \tag{8}$$

Tada se jednostavno može pokazati da je

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} := \|A\|_\infty = \max_{1\le\nu\le n} \sum_{\mu=1}^{m} |\alpha_{\nu\mu}|, \quad A = [\alpha_{\nu\mu}] \in \mathbb{R}^{n\times m}\,. \tag{9}$$

Sada, po analogiji sa (2), imamo

$$\Delta y_\nu = f_\nu(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - f_\nu(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\,\Delta x_\mu\,.$$

Dakle, približno nalazimo

$$\begin{aligned} |\Delta y_\nu| &\le \sum_{\mu=1}^{m} \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right| |\Delta x_\mu| \le \max_\mu |\Delta x_\mu| \cdot \sum_{\mu=1}^{m} \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right| \\ &\le \max_\mu |\Delta x_\mu| \cdot \max_\nu \sum_{\mu=1}^{m} \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right|\,. \end{aligned}$$

Kako ovo važi za svako $\nu = 1,\ldots,n$, to, takođe, važi i za $\max\limits_\nu |\Delta y_\nu|$, dajući, u smislu (8) i (9),

$$\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty \le \|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty \left\|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}\right\|_\infty\,. \tag{10}$$

Ovde je

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}\right\| = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Jacobieva matrica preslikavanja $\boldsymbol{f}$. Jacobieva matrica kod sistema funkcija sa više promenljivih predstavlja analogon prvom izvodu funkcije jedne promenljive.

Iz (10) se za relativne promene neposredno dobija

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \le \frac{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_\infty} \cdot \frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}.$$

Iako je ovo nejednakost, ona je tačna u smislu da jednakost može biti dostignuta za neku podesnu promenu $\Delta \boldsymbol{x}$. Tako, možemo definisati globalni faktor uslovljenosti sa

$$\text{(11)} \qquad (\operatorname{cond} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) := \frac{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_\infty}.$$

Jasno je da se u slučaju $m = n = 1$, definicija (11) svodi na definiciju (4) (kao i na (7)) datu ranije. Za veće dimenzije ($m$ i/ili $n$ veće od 1), međutim, faktor uslovljenosti u (11) je mnogo grublji nego onaj u (7). To možemo objasniti time što norme teže da unište "detalje", Na primer, ako $\boldsymbol{x}$ ima komponente sa prilično različitim odstupanjima, onda je norma $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ naprosto jednaka najvećoj od ovih komponenti uzetih po modulu, dok se sve ostale komponente ignorišu. Zbog toga se zahteva opreznost kod korišćenja (11).

*Uslovljenost algoritma.* Neka je za problem (1) dat algoritam $A$ za njegovo rešavanje na računaru, tj. za dati vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m(t,s)$ algoritam $A$ daje vektor $\boldsymbol{y}_A$ (u aritmetici konačne dužine) za koji se pretpostavlja da aproksimira $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Tako, mi sada imamo drugo preslikavanje $\boldsymbol{f}_A$ koje opisuje kako je izračunavanje $\boldsymbol{f}$ rešeno algoritmom $A$,

$$\boldsymbol{f}_A : \mathbb{R}^m(t,s) \to \mathbb{R}^n(t,s), \quad \boldsymbol{y}_A = \boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{x}).$$

Da bismo mogli analizirati $\boldsymbol{f}_A$, u ovim opštim izrazima, moramo formulisati osnovnu pretpostavku, naime,

$$\text{(12)} \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m(t,s))\,(\exists \boldsymbol{x}_A \in \mathbb{R}^m) \quad (\boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_A)).$$

Zapravo, izračunato rešenje koje odgovara nekom ulazu $\boldsymbol{x}$ je tačno rešenje za neki različit ulaz $\boldsymbol{x}_A$ (ne obavezno mašinski vektor i ne obavezno jedinstveno određen) za koji se nadamo da je blizak sa $\boldsymbol{x}$. Mi, dakle, definišemo faktor uslovljenosti algoritma $A$ pomoću izraza u kome figuriše vektor $\boldsymbol{x}_A$ (najbliži vektoru $\boldsymbol{x}$ ako ih ima više od jednog), upoređivanjem njegove relativne greške sa mašinskom preciznošću eps:

$$\text{(13)} \qquad (\operatorname{cond} A)(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x}_A} \frac{\|\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \Big/ \text{eps}.$$

Ovde se infimum uzima preko svih $\boldsymbol{x}_A$ koji zadovoljavaju $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_A)$. Praktično može se uzeti bilo koje takvo $\boldsymbol{x}_A$ i onda dobiti gornja granica za faktor uslovljenosti:

$$(\operatorname{cond} A)(\boldsymbol{x}) \le \frac{\|\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \Big/ \text{eps}\,. \tag{14}$$

U (13) ili (14) uzima se ona vektorska norma koja se učini pogodnom za primenu.

Naravno, što je $\boldsymbol{x}_A$ bliže $\boldsymbol{x}$ (u smislu odgovarajuće metrike koja proizilazi iz izabrane norme u (13)) to će faktor uslovljenosti biti manji, tj. kažemo da je algoritam bolje uslovljen i obrnuto.

*Mašinsko* (*kompjutersko*) *rešenje problema i totalna greška.* Posmatrajmo opet problem (1), čije rešenje tražimo. To je idealizovan matematički problem, gde su podaci tačni realni brojevi, a rešenje je matematički *tačno rešenje.*

Kada takav problem rešavamo na računaru, u aritmetici sa pokretnom tačkom[5] sa preciznošću eps, korišćenjem algoritma $A$, imamo najpre zaokrugljivanje svih podataka, a zatim primenu $\boldsymbol{f}_A$ na tako zaokrugljene podatke (dakle, ne $\boldsymbol{f}$):

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{x}} = \text{zaokruženi podaci}, \qquad \frac{\|\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \varepsilon\,, \\ &\overline{\boldsymbol{y}}_A = \boldsymbol{f}_A(\overline{\boldsymbol{x}})\,. \end{aligned}$$

Ovde je $\varepsilon$ greška zaokrugljivanja podataka.[6] Totalna greška koju mi želimo da ocenimo je tada

$$\frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|}\,.$$

Korišćenjem osnovne pretpostavke (12) nametnute algoritmu $A$ i biranjem optimalnog $\overline{\boldsymbol{x}}_A$, imamo

$$\boldsymbol{f}_A(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_A), \qquad \frac{\|\overline{\boldsymbol{x}}_A - \overline{\boldsymbol{x}}\|}{\|\overline{\boldsymbol{x}}\|} = (\operatorname{cond} A)(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot \text{eps}\,. \tag{15}$$

Neka $\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$. Onda, korišćenjem nejednakosti trougla, dobijamo

$$\frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \le \frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \overline{\boldsymbol{y}}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} + \frac{\|\overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \approx \frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \overline{\boldsymbol{y}}\|}{\|\overline{\boldsymbol{y}}\|} + \frac{\|\overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|}\,,$$

---

[5] Na engleskom: *floating point arithmetic.*

[6] U opštem slučaju, pored zaokrugljivanja podataka, greške mogu biti indukovane i na drugi način (na primer, greške uvedene merenjem kod eksperimentalnih podataka).

gde smo iskoristili (bezopasnu) aproksimaciju $\|\boldsymbol{y}\| \approx \|\overline{\boldsymbol{y}}\|$. Korišćenjem (15), imamo za prvi izraz na desnoj strani u prethodnoj nejednakosti nalazimo

$$\begin{aligned}\frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \overline{\boldsymbol{y}}\|}{\|\overline{\boldsymbol{y}}\|} = \frac{\|\boldsymbol{f}_A(\overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})\|}{\|\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})\|} &= \frac{\|\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_A) - \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})\|}{\|\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})\|} \\ &\le (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot \frac{\|\overline{\boldsymbol{x}}_A - \overline{\boldsymbol{x}}\|}{\|\overline{\boldsymbol{x}}\|} \\ &= (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot (\operatorname{cond}A)(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{eps}\,.\end{aligned}$$

Slično, a drugi izraz imamo

$$\frac{\|\overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\|\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|} \le (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\|\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \cdot \varepsilon\,.$$

Pretpostavljajući, najzad, da $(\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\overline{\boldsymbol{x}}) \approx (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$, dobijamo

$$\frac{\|\overline{\boldsymbol{y}}_A - \boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \le (\operatorname{cond}\boldsymbol{f})(x)\big[\varepsilon + (\operatorname{cond}A)(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{eps}\big]\,. \tag{16}$$

Formula (16) pokazuje koliko greške u ulaznim podacima ($\varepsilon$) i mašinska preciznost (eps) doprinose totalnoj greški: obe su uvećane uslovljenošću problema, dok je druga uvećana i uslovljenošću algoritma.

*Literatura:*

W. Gautschi: *Numerical Analysis, An Introduction.* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1997.

**2.1.9.** Data je algebarska jednačina

$$x^n + x^{n-1} - a = 0, \quad a > 0, \quad n \ge 2. \tag{1}$$

a) Pokazati da postoji tačno jedan pozitivan koren $\xi(a)$ jednačine (1).

b) Pokazati da je koren $\xi(a)$ dobro uslovljen kao funkcija od $a$.

**Rešenje.** a) Neka je $p(x) = x^n + x^{n-1} - a$. Tada je

$$p'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} = x^{n-2}(nx + n - 1) > 0 \quad \text{za } x > 0.$$

S obzirom da je $p(0) = -a < 0$, $p(+\infty) > 0$, postoji tačno jedan pozitivan koren jednačine (1).

b) Kako je

$$[\xi(a)]^n + [\xi(a)]^{n-1} - a \equiv 0,$$

diferenciranjem dobijamo

$$n[\xi(a)]^{n-1}\xi'(a) + (n-1)[\xi(a)]^{n-2}\xi'(a) - 1 = 0,$$

gde je

$$\begin{aligned}\xi'(a) &= \frac{1}{n[\xi(a)]^{n-1} + (n-1)[\xi(a)]^{n-2}} = \frac{\xi(a)}{n[\xi(a)]^{n} + (n-1)[\xi(a)]^{n-1}}\\ &= \frac{\xi(a)}{n[\xi(a)]^{n} + (n-1)\left(a - [\xi(a)]^{n}\right)}\\ &= \frac{\xi(a)}{(n-1)a + [\xi(a)]^{n}}\,.\end{aligned}$$

Dakle (videti (4) u zadatku 2.1.8),

$$\begin{aligned}(\operatorname{cond}\xi)(a) &= \left|\frac{a\xi'(a)}{\xi(a)}\right| = \frac{a}{(n-1)a + [\xi(a)]^{n}}\\ &= \frac{1}{n-1+\dfrac{[\xi(a)]^{n}}{a}} < \frac{1}{n-1} \le 1\,.\end{aligned}$$

**2.1.10.** U teoriji Fourierovih redova brojevi

$$\lambda_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\frac{k\pi}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

su poznati kao Lebesgueove konstante.

a) Pokazati da izrazi pod sumom monotono rastu po $k$. Kako se ti izrazi ponašaju kada je $n$ veliko, a $k$ blisko broju $n$?

b) Korišćenjem odgovarajućih FORTRAN programa u aritmetici obične preciznosti (S-aritmetika) i aritmetici dvostruke preciznosti (D-aritmetika)[7], izračunati $\lambda_n$ za $n = 1, 10, 10^2, \ldots, 10^5$, uporediti dobijene rezultate i dati objašnjenje za takve rezultate.

**Rešenje.** a) Neka je $x = k\pi/(2n+1)$, tako da je $0 < x < \pi/2$ za $1 \le k \le n$. Onda je, do na konstantni faktor, opšti član sume

$$f(x) = \frac{1}{x}\tan x.$$

[7] Na engleskom: *single arithmetic* i *double precision arithmetic.*

Pokažimo da $f$ monotono raste. Kako je

$$[xf(x)]' = \frac{1}{\cos x^2},$$

imamo

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{x\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \frac{1}{x}\sin x\cos x\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \frac{\sin 2x}{2x}\right) > 0\,. \end{aligned}$$

Dakle, izraz pod sumom monotono raste. Za $n$ vrlo veliko, na primer $n = 10^5$, najveći broj sabiraka sume je zanemarljivo mali, izuzev nekoliko njih kod kojih se indeks sume $k$ približava vrednosti $n$, pa oni naglo rastu ka maksimalnoj vrednosti $\approx 4/\pi$. To može biti pokazano stavljanjem $k = n - r$ za neki fiksirani (mali) prirodan broj $r$ i veliko $n$. U tom slučaju imamo

$$\frac{n-r}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2r+1}{2(2n+1)}$$

i, kada $n \to +\infty$,

$$\tan\frac{(n-r)\pi}{2n+1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{2r+1}{2n+1}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2r+1}{2n+1}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2r+1}{2n+1}\right)} \sim \frac{4}{\pi}\frac{n}{2r+1}\,.$$

Dakle,

$$\frac{1}{n-r}\tan\frac{(n-r)\pi}{2n+1} \sim \frac{4}{\pi}\frac{1}{2r+1}, \quad \text{kada} \quad n \to +\infty.$$

b) U S– i D–aritmetici[8)] se dobijaju sledeći rezultati:

| $n$ | $\lambda_n$ (S–aritmetika) | $\lambda_n$ (D–aritmetika) |
|---|---|---|
| 1 | $0.1435991 \cdot 10$ | $0.1435991124 \cdot 10$ |
| 10 | $0.2223358 \cdot 10$ | $0.2223356924 \cdot 10$ |
| 100 | $0.3138789 \cdot 10$ | $0.3138780093 \cdot 10$ |
| 1000 | $0.4070239 \cdot 10$ | $0.4070163604 \cdot 10$ |
| 10000 | $0.5003598 \cdot 10$ | $0.5003183862 \cdot 10$ |
| 100000 | $0.5939583 \cdot 10$ | $0.5936368212 \cdot 10$ |

[8)] Odgovarajuće mašinske preciznosti eps na 533au2 su $1.19 \cdot 10^{-7}$ (za S-aritmetiku), $2.22 \cdot 10^{-16}$ (za D–aritmetiku) i $1.93 \cdot 10^{-34}$ (za Q–aritmetiku).

Odgovarajući FORTRAN program ima jednostavan kod. Na primer, u D–aritmetici on izgleda:

```
   double precision dtg,x,pi,uk,del,cleb,suma
   dtg(x)=dsin(x)/dcos(x)
   pi=4*datan(1.d0)
   do 15 i=0,5
   n=10**i
   uk=2*n+1
   del=pi/uk
   cleb=1/uk
   suma=0
   do 10 k=1,n
   x=k*del
10 suma=suma+dtg(x)/k
   cleb=cleb+2*suma/pi
15 write(1,20) n,cleb
20 format(I10,e17.7)
   stop
   end
```

Zbog ponašanja izraza pod sumom, kada je $n$ veliko, tačnost sume je uveliko određena tačnošću sabiraka u kojima je $k$ veoma blisko $n$. Međutim, u tim slučajevima, argument tangesa je vrlo blizak $\pi/2$. S obzirom da je (videti (4) u zadatku 2.1.8)

$$(\text{cond } \tan)(x) = \frac{x(1+\tan^2 x)}{\tan x}, \quad 0 < x < \pi/2\,,$$

to je tangens veoma slabo uslovljen za $x$ blisko $\pi/2$. Zaista, ako je $\varepsilon$ (>)0 veoma malo, tada je

$$(\text{cond } \tan)\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \sim \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} \sim \frac{\pi}{2\varepsilon}\,.$$

S obzirom da $k = n$ odgovara $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2(2n+1)} \sim \dfrac{\pi}{4n}$, važi

$$(\text{cond } \tan)\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \sim \frac{\pi}{2\pi/(4n)} = 2n, \quad n \to +\infty\,.$$

Tako, na primer, za $n = 10^5$, možemo očekivati gubitak od oko pet decimalnih cifara. To je potvrđeno dobijenim numeričkim rezultatima koji su prethodno prikazani.

Uočena netačnost ne može biti pripisana samo velikom obimu izračunavanja, tj. nagomilavanju greške zaokrugljivanja međurezultata u procesu izračunavanja na računskoj mašini. Ako, na primer, izračunavamo sumu iz (1) u kojoj se indeks sume kreće od $k = 1$ do $k = n/2$, tj. sumu

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k} \tan \frac{k\pi}{2n+1},$$

slaba uslovljenost tangensa se ne pojavljuje. U tom slučaju, čak i za $n = 10^5$, dobijamo dovoljno tačne rezultate i u običnoj aritmetici:

| $n$ | $\tilde{\lambda}_n$ (S–aritmetika) | $\tilde{\lambda}_n$ (D–aritmetika) |
|---|---|---|
| 1 | 0.3333333 | 0.3333333333 |
| 10 | 0.5706023 | 0.5706023118 |
| 100 | 0.5436349 | 0.5436349731 |
| 1000 | 0.5407878 | 0.5407873971 |
| 10000 | 0.5405016 | 0.5405010908 |
| 100000 | 0.5404736 | 0.5404724446 |

**2.1.11.** Izračunati

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\, dt$$

za fiksirani prirodan broj $n$.

**Rešenje.** Za $n = 0$ imamo

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \log(t+5)\Big|_0^1 = \log\frac{6}{5}\,. \tag{1}$$

Da bismo našli rekurentnu formulu za određivanje traženog integrala, uočimo da

$$\frac{t}{t+5} = 1 - \frac{5}{t+5}\,.$$

Množenjem obe strane sa $t^{k-1}$ i integracijom od 0 do 1 dobijamo

$$I_k = -5I_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Dakle šema za izračunavanje $I_n$ bi se mogla ovako definisati: Startujući sa $I_0$ koje je dato sa (1), sukcesivno primenjujemo (2) za $k = 1, 2, \ldots, n$, i tako dobijamo $I_n$.

Rekurentna relacija (2), za bilo koju startnu vrednost $I_0$, definiše funkciju

$$I_n = f_n(I_0). \tag{3}$$

Tako smo dobili problem $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n$ je parametar) koji možemo prikazati na sledeći način:

$$I_0 \longrightarrow \boxed{\;f_n\;} \longrightarrow I_n\,.$$

Ovde smo zainteresovani za uslovljenost (videti zadatak 2.1.8) preslikavanja $f_n$ u tački $I_0$. Zaista, s obzirom da broj $I_0$ iz (1) nije mašinski reprezentabilan, to mora biti zaokružen na $\overline{I}_0$ pre startovanja rekurentnog procesa (2). Čak i kada ne bi bilo unošenja novih grešaka tokom rekurentnog procesa (2), konačni rezultat neće biti tačno $I_n$, već neka aproksimacija $\overline{I}_n = f_n(\overline{I}_0)$ za koju imamo

$$\left|\frac{\overline{I}_n - I_n}{I_n}\right| = (\operatorname{cond} f_n)(I_0)\left|\frac{\overline{I}_0 - I_0}{I_0}\right|\,. \tag{4}$$

Ovde važi jednakost s obzirom na linearnost funkcije $f_n$ po $I_0$, kako je to napomenuto posle (3) u zadatku 2.1.8. Zaista, ako je $n = 1$, onda

$$I_1 = f_1(I_0) = -5I_0 + 1\,.$$

Ako je $n = 2$, tada

$$I_2 = f_2(I_0) = -5I_1 + \frac{1}{2} = (-5)^2 I_0 - 5 + \frac{1}{2},$$

itd. Uopšte, imamo

$$I_n = f_n(I_0) = (-5)^n I_0 + p_n,$$

gde je $p_n$ neki broj (nezavisan od $I_0$). Sada možemo lako zaključiti da je

$$(\operatorname{cond} f_n)(I_0) = \left|\frac{I_0 f_n'(I_0)}{I_n}\right| = \left|\frac{I_0(-5)^n}{I_n}\right| = \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_n}. \tag{5}$$

Iz definicije $I_n$ kao integrala jasno je da $I_n$ opada monotono po $n$ (zapravo konvergira monotono ka nuli kada $n \to +\infty$), pa dakle, vidimo da je $f_n(I_0)$ slabo uslovljeno u odnosu na $I_0$ i to sve više što je $n$ veće.

Uočavamo da do stalnog uvećavanja greške u procecu izračunavanja, pomoću rekurentne formule (2), dolazi usled množenja sa $(-5)$ u svakom koraku izračunavanja.

Postastavlja se pitanje kako možemo izbeći ovu slabu uslovljenost. Rešenje nalazimo u zapažanju da umesto da množimo velikim brojem bolje bi bilo da delimo velikim brojem, pogotovu ako dobijamo veće rezultate u isto vreme. To se izvodi izračunavanjem unazad u formuli (2), tj. biranjem nekog $\nu > n$ i izračunavanjem po formuli

$$I_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - I_k\right), \quad k = \nu, \nu-1, \ldots, n+1.$$

Problem je tada, naravno, kako izračunati startnu vrednost $I_\nu$.

Pre nego se pozabavimo sa tim, primetimo da sada imamo novi problem $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n$ je parametar $< \nu$) koji možemo prikazati na sledeći način:

$$I_\nu \longrightarrow \boxed{\; g_n \;} \longrightarrow I_n\,.$$

Kao i u prethodnom slučaju, razmatramo funkciju $g_n$ kao linearnu funkciju od $I_\nu$ i na sličan način kako smo došli do (5), zaključujemo da je

$$(\operatorname{cond} g_n)(I_\nu) = \left|\frac{I_\nu\,(-1/5)^{\nu-n}}{I_n}\right|, \qquad \nu > n.$$

Opet, na osnovu monotonosti za $I_n$, dobijamo

$$(\operatorname{cond} g_n)(I_\nu) < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n.$$

Po analogiji sa (4), sada imamo

$$\left|\frac{\overline{I}_n - I_n}{I_n}\right| = (\operatorname{cond} g_n)(I_\nu)\left|\frac{\overline{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu}\right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}\left|\frac{\overline{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu}\right|, \tag{6}$$

gde je $\overline{I}_\nu$ neka aproksimacija od $I_\nu$. Zapravo, $\overline{I}_\nu$ čak ne mora biti blizu $I_\nu$ da bi važilo (6), s obzirom da je funkcija $g_n$ linearna po $I_\nu$. Tako, možemo uzeti startnu vrednost sa 100% relativnom greškom, tj. $\overline{I}_\nu = 0$, da bismo dobili $\overline{I}_n$ sa relativnom greškom

$$\left|\frac{\overline{I}_n - I_n}{I_n}\right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n.$$

Granica sa desne strane može da se učini proizvoljno malom, na primer $\leq \varepsilon$, ako izaberemo $\nu$ dovoljno veliko, tj.

$$\nu \geq n + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 5}\,. \tag{7}$$

Procedura se može formulisati u sledećem obliku: Za zadatu relativnu tačnost $\varepsilon$, izabrati $\nu$ kao najmanji prirodan broj koji zadovoljava (7), a onda računati

$$\overline{I}_\nu = 0, \qquad \overline{I}_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - \overline{I}_k\right), \quad k = \nu, \nu-1, \dots, n+1. \tag{8}$$

Dakle, ova procedura obezbeđuje određivanje $\overline{I}_n$, koje dovoljno tačno aproksimira $I_n$. Štaviše, prisutne greške zaokrugljivanja tokom izvršavanja (8) biće stalno smanjivane.

**2.1.12.** Ispitati uslovljenost algoritma za množenje $n$ realnih brojeva koji su zadati tačno i mašinski su reprezentabilni na računskoj mašini.

**Rešenje.** Neka su $x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ brojevi koje treba pomnožiti. Uvedimo oznaku $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \ \dots \quad x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$.

Matematički posmatrano (sva izračunavanja se izvode apsolutno tačno), imamo problem koji bi se mogao interpretirati kao preslikavanje

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad y = f(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n, \tag{1}$$

i ono bi se moglo, na primer, realizovati na sledeći način:

$$A: \quad \begin{aligned} &p_1 = x_1, \\ &p_k = x_k p_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ &y = p_n\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Pri izračunavanju na računaru po istom algoritmu (2), situacija je nešto drugojačija. Prema uslovu u zadatku, brojevi $x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ su mašinski reprezentabilni brojevi, tj. $x_i \in \mathbb{R}(t, s)$ $(i = 1, \dots, n)$ (videti zadatak 2.1.8). Međutim, s obzirom na konačnost broja cifara mantise svakog broja u računaru ($t$), posle svake operacije množenja javlja se odgovarajuća mašinska greška (kao posledice zaokruživanja rezultata na $t$ cifara mantise). Ove mašinske greške označimo sa $r_i$ $(i = 2, \dots, n)$ i neka je $|r_i| \le \text{eps}$, gde je eps mašinska preciznost (videti zadatak 2.1.8).

Dakle, korišćenjem istog algoritma (2), nećemo imati preslikavanje $f$, već preslikavanje $f_A$, koje je definisano sa

$$f_A : \mathbb{R}^n(t, s) \to \mathbb{R}(t, s), \quad y_A = f_A(\boldsymbol{x})$$

tj. primenom algoritma (2), na mesto $p_i$ $(i = 2, \dots, n)$ dobijamo $\overline{p}_i$ $(i = 2, \dots, n)$, a na mesto $y$ dobijamo $y_A$, pri čemu je (ovde koristimo oznaku $\odot$ za množenje kako bismo naznačili da se ono izvršava na računaru, posle čega imamo pojavu mašinske greške):

$$
\begin{aligned}
&p_1 = x_1,\\
&\overline{p}_2 = x_2 \odot p_1 = x_2 p_1 (1+r_2) = x_2 x_1 (1+r_2),\\
&\overline{p}_3 = x_3 \odot \overline{p}_2 = x_3 \overline{p}_2 (1+r_3) = x_3 x_2 x_1 (1+r_2)(1+r_3),\\
&\quad\vdots\\
&\overline{p}_n = x_n \odot \overline{p}_{n-1} = x_n \overline{p}_{n-1}(1+r_n) = x_n x_{n-1} \cdots x_1 (1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n),\\
&y_A = \overline{p}_n .
\end{aligned}
$$

U smislu (12) (videti zadatku 2.1.8) možemo uzeti, na primer,[9] da je

$$\boldsymbol{x}_A = [x_1 \quad x_2(1+r_2) \ \cdots \ x_n(1+r_n)]^\top ,$$

pri čemu je $f_A(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_A)$. Korišćenjem $\|\cdot\|_\infty$ norme, imamo

$$\frac{\|\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \cdot \mathrm{eps}} = \frac{\|[0 \ x_2 r_2 \ \dots \ x_n r_n]^\top\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \cdot \mathrm{eps}} \le \frac{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \cdot \mathrm{eps}}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty \cdot \mathrm{eps}} = 1 .$$

Na taj način, pomoću (14) iz zadatka 2.1.8, $(\operatorname{cond} A)(\boldsymbol{x}) \le 1$ za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n(t,s)$. Dakle, saglasno očekivanju, ovaj algoritam je perfektno dobro uslovljen.

**2.1.13.** Na osnovu Taylorovog razvoja funkcije

$$\sin\frac{\pi x}{2} \cong \frac{\pi}{2}\,x - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{x^3}{6} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{x^5}{120} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \frac{x^7}{5040} ,$$

naći koeficijente u racionalnoj aproksimacionoj funkciji

$$\sin\frac{\pi x}{2} \cong \frac{b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3}{1 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + c_4\,x^4} .$$

**Rešenje.** S obzirom da je funkcija $x \mapsto \sin\dfrac{\pi x}{2}$ neparna, imamo $b_0 = b_2 = c_1 = c_3 = 0$, pa je

$$\sin\frac{\pi x}{2} \cong \frac{b_1\,x + b_3\,x^3}{1 + c_2\,x^2 + c_4\,x^4} .$$

Na osnovu

$$\frac{\pi}{2}\,x - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{x^3}{6} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{x^5}{120} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \frac{x^7}{5040} \cong \frac{b_1\,x + b_3\,x^3}{1 + c_2\,x^2 + c_4\,x^4}$$

[9] Ovde ne postoji jedinstvenost.

imamo

$$b_1 = \frac{\pi}{2}\,, \quad \frac{\pi}{2}\,c_2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = b_3\,, \quad \frac{\pi}{2}\,c_4 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 c_2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0\,,$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 c_4 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 c_2 - \frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0\,,$$

odakle je

$$b_1 = \frac{\pi}{2}\,, \quad b_3 = -\frac{31}{294}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\,, \quad c_2 = \frac{3}{49}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\,, \quad c_4 = \frac{11}{5880}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\,.$$

**2.1.14.** Za racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{a + b\,x + c\,x^2}{1 + d\,x} \tag{1}$$

naći odgovarajući verižni razlomak

$$f(x) = k_1 + \cfrac{x}{k_2 + \cfrac{x}{k_3 + \cfrac{x}{k_4}}}\,.$$

**Rešenje.** $f(x)$ je moguće izraziti u obliku

$$f(x) = \frac{k_1 + \left(\dfrac{1}{k_2} + k_1\left(\dfrac{1}{k_2\,k_3} + \dfrac{1}{k_3\,k_4}\right)\right)x + \dfrac{1}{k_2\,k_3\,k_4}\,x^2}{1 + \left(\dfrac{1}{k_3\,k_4} + \dfrac{1}{k_2\,k_3}\right)x}\,. \tag{2}$$

Upoređivanjem (1) i (2) imamo

$$k_1 = a\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{k_3\,k_4} + \frac{1}{k_2\,k_3} = d\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{k_2} + k_1\,d = b\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{k_2\,k_3\,k_4} = c\,. \tag{6}$$

Na osnovu (3) i (5) dobijamo $k_2 = \dfrac{1}{b - ad}$.

Kako je iz (6) $\dfrac{1}{k_3\, k_4} = k_2\, c = \dfrac{c}{b-ad}$, na osnovu (4) imamo

$$\frac{c}{b-ad} + \frac{b-ad}{k_3} = d \quad \Longrightarrow \quad k_3 = \frac{(b-ad)^2}{d(b-ad)-c}\,.$$

Najzad, na osnovu (6) je

$$k_4 = \frac{1}{k_2\, k_3\, c} = (b-ad)\cdot\frac{d(b-ad)-c}{(b-ad)^2}\cdot\frac{1}{c} = \frac{d(b-ad)-c}{c(b-ad)}\,.$$

**2.1.15.** Za izračunavanje vrednosti funkcije $f$ date sa

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

može se koristiti aproksimacija u obliku racionalne funkcije

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1\, x^2 + a_2\, x^4}{1 + b_1\, x^2 + b_2\, x^4}\,, \tag{1}$$

gde su

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.9999995866\,, \\ a_1 &= 0.6680813502\,, \\ a_2 &= 0.0426819418\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_1 &= 1.0013844843\,, \\ b_2 &= 0.1768253206\,. \end{aligned}$$

Odrediti koeficijente $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ ako se $R(x)$ predstavi u obliku

$$R(x) = A + \cfrac{B}{x^2 + C + \cfrac{D}{x^2+E}}\,. \tag{2}$$

**Rešenje.** Kako je, na osnovu (2),

$$R(x) = \frac{(A\,(CE+D)+BE) + (B + A\,(C+E))\,x^2 + A\,x^4}{(CE+D) + (C+E)\,x^2 + x^4}\,,$$

a, na osnovu (1),

$$R(x) = \frac{a_0/b_2 + a_1/b_2\ x^2 + a_2/b_2\ x^4}{1/b_2 + b_1/b_2\ x^2 + x^4}\,,$$

upoređivanjem koeficijenata dobijamo

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a_2}{b_2} = 0.2413791286\,,\\
B &= \frac{a_1}{b_2} - A\,\frac{b_1}{b_2} = 2.4112385859\,,\\
E &= \frac{1}{B}\cdot\frac{a_0 - A}{b_2} = 1.7792620318\,,\\
C &= \frac{b_1}{b_2} - E = 3.8838663081\,,\\
D &= \frac{1}{b_2} - CE = 1.2551171909\,.
\end{aligned}$$

Primetimo da je za približno izračunavanje vrednosti $f(x)$, na osnovu (2), potrebno izvršiti sledeći broj operacija: jedno množenje, dva deljenja i četiri sabiranja.

**Primedba.** Može se pokazati da je

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - R(x)| \le 0.413\cdot 10^{-6}\,.$$

*Literatura:*

E. Fröberg: *Rational Chebyshev approximations of elementary functions.* BIT **1** (1961), 256–262.

**2.1.16.** Na osnovu Eulerovog razvoja

$$e^x = \left[0\,;\ \frac{1}{1}\,,\ \frac{-2x}{2+x}\,,\ \frac{x^2}{6}\,,\ \frac{x^2}{10}\,,\ \ldots\,,\ \frac{x^2}{4n+2}\,,\ \ldots\right]$$

naći prvih pet aproksimacija za izračunavanje vrednosti funkcije $e^x$.

**Rešenje.** Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} \equiv \left[a_0\,;\ \frac{b_1}{a_1}\,,\ \frac{b_2}{a_2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{b_k}{a_k}\right].$$

Ako uzmemo $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, lako se dobijaju sledeće rekurentne relacije

$$\begin{aligned}
P_k &= a_k\,P_{k-1} + b_k\,P_{k-2}\,,\\
Q_k &= a_k\,Q_{k-1} + b_k\,Q_{k-2}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Na osnovu Eulerovog razvoja potrebno je naći $R_k$ za $k = 1,2,3,4,5$.

Kako je $a_0 = 0,\ b_1 = a_1 = 1,\ b_2 = -2x,\ a_2 = 2 + x,\ b_3 = b_4 = b_5 = x^2$, $a_3 = 6,\ a_4 = 10,\ a_5 = 14$, primenom rekurentnih relacija (1), dobijamo redom

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_1(x) = \frac{1}{1}\,,\\
R_2 &= R_2(x) = \frac{2+x}{2-x}\,,\\
R_3 &= R_3(x) = \frac{12+6\,x+x^2}{12-6\,x+x^2}\,,\\
R_4 &= R_4(x) = \frac{120+60\,x+12\,x^2+x^3}{120-60\,x+12\,x^2-x^3}\,,\\
R_5 &= R_5(x) = \frac{1680+840\,x+180\,x^2+20\,x^3+x^4}{1680-840\,x+180\,x^2-20\,x^3+x^4}\,.
\end{aligned}
$$

Primetimo da dobijene aproksimacije $R_k(x)$ zadovoljavaju uslov

$$R_k(x)\,R_k(-x) = 1\,.$$

Može se pokazati da racionalna funkcija $R_k(x)$ ispunjava pomenuti uslov ako i samo ako se ona može predstaviti u obliku

$$R(x) = 1 - \frac{2x}{T\left(x^2\right) + x}\,,$$

gde $T(x^2)$ označava racionalnu funkciju po $x^2$. Za dokaz ovog tvrđenja treba najpre dokazati da takva racionalna funkcija mora imati reprezentaciju u obliku $R(x) = P(x)/P(-x)$, gde je $P(x)$ algebarski polinom. Nije teško videti da je tada

$$T(x^2) = x\,\frac{P(-x)+P(x)}{P(-x)-P(x)}\,.$$

Na primer, za funkciju $R_4(x)$, imamo $P(x) = 120 + 60\,x + 12\,x^2 + x^3$, pa je odgovarajuća funkcija $T(x^2)$ data sa

$$T(x^2) = -12\,\frac{x^2+10}{x^2+60}\,.$$

Dakle, dobijamo

$$R_4(x) = 1 - \cfrac{2x}{x - 12\,\cfrac{x^2+10}{x^2+60}}\,.$$

Na primer, na osnovu prethodnog,

$$e^{0.5} \cong R_4(0.5) = 1.6487214\,,$$

što predstavlja tačnu vrednost na šest decimala.

**2.1.17.** Pokazati kako se aproksimacija

$$\sin\frac{\pi z}{2} \cong 1.57032002\, z - 0.64211317\, z^3 + 0.07186085\, z^5\,,$$

koja važi za $z \in [-1, 1]$, može primeniti na izračunavanje vrednosti $\sin x$ za svako $x$.

**Rešenje.** Da bismo izračunali $\sin x$, odredimo najpre, $u = \dfrac{2}{\pi}x$ i $v = u - 4\left[\dfrac{1}{4}(u+1)\right]$, gde $[x]$ označava najveći ceo broj ne veći od $x$[10]. Nadalje, ako je $v \le 1$, stavimo $z = v$, u protivnom stavimo $z = 2 - v$. Nije teško videti da je tada $-1 \le z \le 1$ i

$$\sin x = \sin\frac{\pi z}{2}\,.$$

Naime, za svako $x$ imamo

$$\sin x = \sin\frac{\pi u}{2} = \sin\frac{\pi}{2}\left(v + 4\left[\frac{1}{4}(u+1)\right]\right) = \sin\left(\frac{\pi v}{2} + 2\pi\left[\frac{1}{4}(u+1)\right]\right)\,,$$

tj.

$$\sin x = \sin\frac{\pi v}{2}\,.$$

S druge strane, kako je

$$v = 4\left(\frac{1}{4}(u+1) - \left[\frac{1}{4}(u+1)\right]\right) - 1\,,$$

zaključujemo da je $-1 \le v < 3$. Tada na osnovu prethodnog imamo

$$z = \begin{cases} v & (-1 \le v \le 1)\,, \\ 2 - v & (1 < v < 3)\,, \end{cases}$$

što znači da je uvek $-1 \le z \le 1$. Takođe, $\sin x = \sin\dfrac{\pi z}{2}$.

**2.1.18.** Dat je stepeni red

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\,. \tag{1}$$

---

[10] Na primer, $[2.71] = 2$, $[-2.71] = -3$.

Sukcesivnom primenom Euler–Abelove transformacije dva puta, odrediti $f(-1)$ sa tačnošću $5 \cdot 10^{-4}$. Koliko je članova reda potrebno kod direktnog sumiranja za postizanje iste tačnosti?

**Rešenje.** Neka je dat stepeni red

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, x^k \,, \tag{2}$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = 1$.[11)] Sukcesivnom primenom Euler–Abelove transformacije $m$ puta na red (2) dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^k a_0 \left( \frac{x}{1-x} \right)^k + \left( \frac{x}{1-x} \right)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^m a_k \, x^k \tag{3}$$

(videti [1, str. 48–51]). Kako je za dati red (1)

$$R^{-1} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{(k+1)^2}}{\dfrac{1}{k^2}} = 1 \,, \quad a_0 = 0 \,, \quad a_k = \frac{1}{k^2} \ (k = 1, 2, \dots) \,,$$

to je

$$\begin{aligned}
&\Delta a_0 = a_1 - a_0 = 1 \,, \\
&\Delta^2 a_0 = \Delta(\Delta a_0) = \Delta(a_1 - a_0) = \Delta \, a_1 - \Delta \, a_0 = a_2 - a_1 - 1 = -\frac{7}{4} \,, \\
&\Delta \, a_k = a_{k+1} - a_k = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} = -\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad (k = 1, 2, \dots) \,, \\
&\Delta^2 a_k = \Delta \, a_{k+1} - \Delta \, a_k = -\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} + \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \\
&\qquad\qquad = \frac{6\,k^2 + 12\,k + 4}{k^2(k+1)^2(k+2)^2} \qquad (k = 1, 2, \dots) \,.
\end{aligned}$$

---

11) Primetimo da ako stepeni red (2) ima poluprečnik konvergencije $R \, (< +\infty)$ tada, s obzirom na

$$f(x) = f(yR) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (yR)^k \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, R^k y^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \, y^k = F(y) \,,$$

gde je $b_k = a_k \, R^k$, stepeni red $F(y)$ ima poluprečnik konvergencije jednak jedinici.

Na osnovu (3) za $m = 2$, imamo

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \left(-\frac{7}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6\,k^2 + 12\,k + 4}{(k(k+1)(k+2))^2}\, x^k\right).$$

U konkretnom slučaju, za $x = -1$, ovo se svodi na

$$f(-1) = -\frac{11}{16} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3\,k^2 + 6\,k + 2}{(k(k+1)(k+2))^2}\,(-1)^k\,. \tag{4}$$

Dobijeni red je alternativan pa greška koju činimo, ako umesto beskonačne sume uzmemo konačnu sumu od $n-$ članova, nije veća od $(n+1)-$og člana sume, uzetog po modulu. Dakle, s obzirom na traženu tačnost zahtevamo da je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3\,k^2 + 6\,k + 2}{(k(k+1)(k+2))^2} \le 5 \cdot 10^{-4}\,.$$

Ovo je zadovoljeno za $k \ge 7$. Znači, dovoljno je uzeti prvih šest članova sume u (4) da bi se postigla željena tačnost. Tako dobijamo

$$f(-1) \cong -0.82222\,.$$

Ako bismo direktno sumirali red (1), za istu tačnost od $5 \cdot 10^{-4}$, potrebno je uzeti najmanje 44 člana reda što sleduje na osnovu nejednakosti

$$\frac{1}{k^2} \le 5 \cdot 10^{-4}\,.$$

Primetimo da je

$$f(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \cong -0.822467\,.$$

**2.1.19.** Korišćenjem Euler–Abelove transformacije primenjene beskonačno puta, naći sumu reda

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}\,.$$

**Rešenje.** Za stepeni red

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k\,,$$

koji ima poluprečnik konvergencije $R = 1$, važi $f(1/3) = S$. Ako u (3) iz prethodnog zadatka pustimo da $m \to +\infty$, dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k a_0 \left(\frac{x}{1-x}\right)^k .$$

Za $x = 1/3$ imamo

$$S = f(1/3) = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k a_0 \, \frac{1}{2^k} . \tag{1}$$

S obzirom da je

$$\begin{array}{cccccc}
k & a_k & \Delta\, a_k & \Delta^2 a_k & \Delta^3 a_k & \Delta^4 a_k \\
0 & \underline{0} & & & & \\
 & & \underline{1} & & & \\
1 & 1 & & \underline{6} & & \\
 & & 7 & & \underline{6} & \\
2 & 8 & & 12 & & \underline{0} \\
 & & 19 & & 6 & \\
3 & 27 & & 18 & & \\
 & & 37 & & & \\
4 & 64 & & & &
\end{array}$$

imamo $\Delta^k a_0 = 0$ za $k = 4, 5, \ldots$ . Na osnovu (1) dobijamo

$$S = \frac{3}{2}\left(1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{1}{8} \cdot 6\right) = 4.125 .$$

## 2.2. Ortogonalni polinomi

**2.2.1.** Koristeći se Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije odrediti prvih pet članova niza ortonormiranih polinoma $\{Q_k^*\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ u prostoru $L^2(-1,1)$ sa težinskom funkcijom $p(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$.

**Rešenje.** Izračunajmo najpre momente težinske funkcije

$$C_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

Kako je $C_{2k+1} = 0$ (zbog neparnosti podintegralne funkcije), ostaje da izračunamo

$$C_{2k} = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx .$$

Primenom parcijalne integracije, gde je $u = x^{2k-1}$, $dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, tj. $du = (2k-1)\,x^{2k-2}\,dx$, $v = -(1-x^2)^{1/2}$, dobijamo

$$\begin{aligned} C_{2k} &= -x^{2k-1}(1-x^2)^{1/2}\Big|_{-1}^{1} - (2k-1)\int_{-1}^{1}(-x^{2k-2})\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= (2k-1)\int_{-1}^{1}\frac{x^{2k-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (2k-1)\left(C_{2k-2} - C_{2k}\right), \end{aligned}$$

tj.

$$C_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,C_{2k-2} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Kako je $C_0 = \pi$, imamo $C_{2k} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\pi$ $(k \in \mathbb{N})$.

U prostoru $L^2(-1,1)$ sa $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ definisan je skalarni proizvod

$$(f,g) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)g(x)\,dx \qquad (f,g \in L^2(-1,1)).$$

Polazeći od prirodnog bazisa $\left\{1, x, x^2, \dots\right\}$, Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije (videti [1, str. 90–92]) dobijamo niz ortogonalnih polinoma $\{Q_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ u odnosu na uvedeni skalarni proizvod, uzimajući $Q_0(x) = 1$ i

$$Q_k(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(x^k, Q_i\right)}{(Q_i, Q_i)}\,Q_i(x) \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

tj.

$$\begin{aligned} &Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2 - \frac{C_2}{C_0}\,Q_0 = x^2 - \frac{1}{2}, \\ &Q_3(x) = x^3 - \frac{C_4}{C_2}\,Q_1(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x, \\ &Q_4(x) = x^4 - \frac{C_4}{C_0}\,Q_0 - \frac{C_6 - \frac{1}{2}\,C_4}{C_4 - C_2 + \frac{1}{4}\,C_0}\,Q_2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Primetimo da smo ovde koristili momente $C_n$ $(n = 0, 1, \dots, 7)$. Uopšte, da bismo generalisali niz ortogonalnih polinoma $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ potrebno je prvih $2n$ momenata težinske funkcije, tj. $C_0,\ C_1, \dots,\ C_{2n-1}$.

Ortogonalni polinomi iz dobijenog niza imaju koeficijente uz najviši stepen promenljive $x$ jednake jedinici. Ortogonalne polinome sa ovakvom osobinom zovemo monični ortogonalni polinomi. Svakako, i niz $\{a_k\, Q_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, gde su $a_k\,(\neq 0)$ konstante, je takođe ortogonalan u odnosu na isti skalarni proizvod. Ako, u našem slučaju, odaberemo na primer $a_0 = 1,\ a_k = 2^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ dobijamo polinome

$$T_0(x) = Q_0(x)\,, \qquad T_k(x) = 2^{k-1} Q_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

koji su poznati kao Čebiševljevi ortogonalni polinomi. Za njih važi

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n)\,, \\ \pi & (m = n = 0)\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \neq 0)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Na osnovu niza $\{Q_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ možemo dobiti niz ortonormiranih polinoma $\{Q_k^*\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ u odnosu na isti skalarni proizvod. Naime,

$$Q_k^*(x) = \frac{Q_k(x)}{\|Q_k\|} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

S obzirom da je $\|Q_k\|^2 = (Q_k, Q_k)$, imamo

$$\begin{aligned}
&\|Q_0\|^2 = C_0 = \pi\,, \quad \|Q_1\|^2 = C_2 = \frac{1}{2}\,\pi\,, \quad \|Q_2\|^2 = C_4 - C_2 + \frac{1}{4}\,C_0 = \frac{1}{8}\,\pi\,, \\
&\|Q_3\|^2 = C_6 - \frac{3}{2}\,C_4 + \frac{9}{16}\,C_2 = \frac{1}{32}\,\pi\,, \\
&\|Q_4\|^2 = C_8 - 2C_6 + \frac{5}{4}\,C_4 - \frac{1}{4}\,C_2 + \frac{1}{64}\,C_0 = \frac{1}{128}\,\pi\,,
\end{aligned}$$

pa su

$$\begin{aligned}
&Q_0^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \ Q_1^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\,, \ Q_2^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2x^2 - 1)\,, \\
&Q_3^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(4x^3 - 3x)\,, \ Q_4^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(8x^4 - 8x^2 + 1)\,.
\end{aligned}$$

Za dobijeni ortonormirani niz uočavamo da je

$$Q_0^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,Q_0(x)\,, \quad Q_k^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^{k-1}\,Q_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

što je, u stvari, u direktnoj vezi sa ortogonalnošću Čebiševljevih polinoma. Naime, s obzirom da je

$$Q_k^*(x) = \frac{T_k(x)}{\|T_k(x)\|}\,,$$

na osnovu (1) i (2) sleduje (3).

**2.2.2.** Ako je $\{Q_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ niz ortogonalnih polinoma na $(-a, a)$ sa parnom težinskom funkcijom $x \mapsto p(x)$, dokazati da je:

1° Niz polinoma $\{Q_{2k}(\sqrt{x})\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ortogonalan na $\big(0, a^2\big)$ sa težinskom funkcijom $x \mapsto p(\sqrt{x})/\sqrt{x}$;

2° Niz polinoma $\{Q_{2k+1}(\sqrt{x})/\sqrt{x}\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ortogonalan na $\big(0, a^2\big)$ sa težinskom funkcijom $x \mapsto \sqrt{x}\, p(\sqrt{x})$.

**Rešenje.** Kako je, za $n \neq k$,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} p(x)\, Q_n(x)\, Q_k(x)\, dx &= \int_{-a}^{a} p(-x)\, Q_n(-x)\, Q_k(-x)\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} p(x)\, Q_n(-x)\, Q_k(-x)\, dx = 0\,,\end{aligned}$$

zaključujemo da je i niz polinoma $\{Q_k(-x)\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, takođe, ortogonalan u odnosu na težinsku funkciju $p(x)$ na $(-a, a)$. S druge strane, zbog jedinstvenosti niza ortogonalnih polinoma, za datu težinsku funkciju i dati interval (do na multiplikativnu konstantu), zaključujemo da mora biti $Q_n(-x) = C_n\, Q_n(x)$, odakle sleduje $C_n = (-1)^n$. Dakle, imamo $Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x)$, tj.

$$\begin{aligned}Q_n(-x) &= \phantom{-}Q_n(x) \qquad (n \text{ – parno})\,,\\ &= -Q_n(x) \qquad (n \text{ – neparno})\,,\end{aligned}$$

što znači da je

$$Q_{2k}(x) = U_k(x^2)\,, \qquad Q_{2k+1}(x) = x\, V_k(x^2)\,,$$

gde su $U_k$ i $V_k$ polinomi $k$–tog stepena.

Neka je $n \neq k$. Tada, na osnovu

$$\int_{-a}^{a} p(x)\, Q_{2n}(x)\, Q_{2k}(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} p(x)\, U_n(x^2) U_k(x^2)\, dx = 0\,,$$

smenom $x^2 = y$, dobijamo

$$\int_{0}^{a^2} \frac{p\big(\sqrt{y}\big)}{\sqrt{y}}\, U_n(y)\, U_k(y)\, dy = 0\,,$$

odakle sleduje trvrđenje 1°.

Slično, na osnovu

$$\int_{-a}^{a} p(x)\, Q_{2n+1}(x)\, Q_{2k+1}(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} p(x)\, x^2\, V_n(x^2) V_k(x^2)\, dx = 0\,,$$

dobijamo (smena $x^2 = y$)

$$\int_0^{a^2} \sqrt{y}\, p\,(\sqrt{y})\, V_n(y)\, V_k(y)\, dy = 0\,,$$

odakle sleduje tvrđenje 2°.

**2.2.3.** Dat je niz $\{Q_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ortogonalnih polinoma na $(a, b)$ sa težinskom funkcijom $p(x)$. Pokazati da je

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b p(x)\, \frac{Q_n(x)}{x - x_k}\, dx = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{\|Q_{n-1}\|^2}{Q_{n-1}(x_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\; n \in \mathbb{N}),$$

gde su $x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ nule polinoma $Q_n(x)$ i

$$Q_\nu(x) = a_\nu\, x^\nu + \text{ članovi nižeg stepena} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)\,.$$

**Rešenje.** Pođimo od Christoffel–Darbouxovog identiteta (videti [1, str. 103])

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{Q_\nu(x)\, Q_\nu(t)}{\|Q_\nu\|^2} = \frac{1}{\alpha_n \|Q_n\|^2} \cdot \frac{Q_{n+1}(x)\, Q_n(t) - Q_n(x)\, Q_{n+1}(t)}{x - t}$$

gde je $\alpha_n$ konstanta u tročlanoj rekurentnoj relaciji

$$\text{(3)} \qquad Q_{n+1}(x) = (\alpha_n\, x + \beta_n)\, Q_n(x) - \gamma_n\, Q_{n-1}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Ako u (2) stavimo $t = x_k$, tada je $Q_n(x_k) = 0$, pa dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu(x_k)}{\|Q_\nu\|^2}\, Q_\nu(x) = -\frac{Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n\, \|Q_n\|^2} \cdot \frac{Q_n(x)}{x - x_k}\,.$$

U poslednjoj jednakosti pomnožimo obe strane sa $p(x)$ i integralimo od $a$ do $b$, tj.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu(x_k)}{\|Q_\nu\|^2} \int_a^b p(x)\, Q_\nu(x)\, dx = -\frac{Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n\, \|Q_n\|^2} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{x - x_k}\, dx\,.$$

Kako je $Q_0(x)$ konstanta, levu stranu jednakosti možemo modifikovati na sledeći način

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu(x_k)}{Q_0(x)\, \|Q_\nu\|^2} \int_a^b p(x)\, Q_\nu(x)\, Q_0(x)\, dx = -\frac{Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n\, \|Q_n\|^2} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{x - x_k}\, dx$$

pa, s obzirom na ortogonalnost, imamo

$$\frac{Q_0(x_k)}{Q_0(x)\,\|Q_0\|^2}\,\|Q_0\|^2 = -\frac{Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n\,\|Q_n\|^2}\int_a^b \frac{Q_n(x)}{x-x_k}\,dx\,,$$

tj.

$$\int_a^b \frac{Q_n(x)}{x-x_k}\,dx = -\frac{\alpha_n\,\|Q_n\|^2}{Q_{n+1}(x_k)}\,.$$

Ako u (3) stavimo $x = x_k$ dobijamo $Q_{n+1}(x_k) = -\gamma_n Q_{n-1}(x_k)$. Kako je (videti [1, str. 100])

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{i} \qquad \gamma_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\,\frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2},$$

na osnovu prethodnog, sleduje (1).

**2.2.4.** Skalarni proizvod dveju neprekidnih funkcija $f$ i $g$, koje su definisane na intervalu $[a,b]$ i na njemu dobijaju vrednosti iz skupa $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, u oznaci $(f,g)$, definišemo sa:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx \qquad \text{(neprekidni slučaj)},$$

odnosno

$$(f,g) = \sum_{i=0}^{m} f(x_\nu)\overline{g(x_\nu)}\omega_\nu \qquad \text{(diskretni slučaj)},$$

gde je u prvom slučaju $\omega(x)$ težinska funkcija, a u drugom pozitivni brojevi $\omega_\nu$, $i = 0, 1, \ldots, m$, su težinski koeficijenti.

Pokazati za sledeće sisteme funkcija da su ortogonalni:

a) Neprekidni slučaj.

$$\varphi_j(x) = \cos jx, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad [a,b] = [0,\pi],\ \omega(x) \equiv 1.$$

b) Diskretni slučaj.

$$\varphi_j(x) = \cos jx, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \qquad [a,b] = [0,\pi],$$

$$x_s = \frac{2s+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots, n, \qquad m = n, \quad \omega_s \equiv 1, \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

c) Neprekidni slučaj.

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \qquad [a,b] = [-\pi,\pi],\ \omega(x) \equiv 1.$$

d) Neprekidni slučaj.

$$\varphi_j(x) = e^{ijx}, \quad i^2 = -1,\ j = 0, \pm 1, \pm 2,\ \ldots\ , \qquad [a, b] = [-\pi, \pi],\ \omega(x) \equiv 1.$$

e) Diskretni slučaj.

$$\varphi_j(x) = e^{ijx}, \quad j = 0, 1, 2,\ \ldots\ , m, \qquad [a, b] = [0, 2\pi],$$
$$x_s = 2\pi\, \frac{s}{m+1}, \quad \omega_s \equiv 1, \quad s = 0, 1,\ \ldots\ , m.$$

**Rešenje.**

a) Za $j \neq k$ važi

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^\pi \cos jx \cos kx\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(j-k)x + \cos(j+k)x]\, dx = 0.$$

Takođe, važi $\|\varphi_0\|^2 = \pi, \quad \|\varphi_j\|^2 = (\varphi_j, \varphi_j) = \pi/2$ za $j > 0$.

b) Određivanjem

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{s=0}^{n} \cos jx_s \cos kx_s$$

može se pokazati da važi

$$\|\varphi_0\|^2 = n + 1, \quad \|\varphi_j\|^2 = \frac{(n+1)}{2} \quad \text{za} \quad j > 0.$$

d) Skalarni proizvod

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\, dx,$$

jednak je 0 za $j \neq k$, a $2\pi$ za $j = k$. Dakle $\|\varphi_j\|^2 = 2\pi$.

e) Za zadati izbor tačaka $x_s$ za funkcije $\varphi_j(x)$ važe relacije

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} m+1, & \text{ako je } \dfrac{j-k}{m+1} \text{ ceo broj}, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Stvarno, po definiciji skalarnog proizvoda, za diskretni slučaj, imamo

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{s=0}^{m} \exp\left[i(j-k)2\pi \frac{s}{m+1}\right],$$

što predstavlja parcijalnu sumu geometrijskog reda sa količnikom

$$q = \exp\left[i(j-k) \cdot 2\frac{\pi}{(m+1)}\right].$$

Ako je $(j-k)/(m+1)$ ceo broj tada je $q = 1$ a suma je jednaka $m + 1$. U ostalim slučajevima dobijamo, po obrascu za zbir članova geometrijske progresije, da je $(\varphi_j, \varphi_k) = 0$.

# III G L A V A

# Opšta teorija iterativnih procesa

## 3.1. Primena Banachovog stava

**3.1.1.** Korišćenjem Banachovog stava o nepokretoj tački, diskutovati egzistenciju rešenja sistema od $k$ linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1k}\,x_k &= b_1\,,\\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2k}\,x_k &= b_2\,,\\
&\vdots\\
a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \cdots + a_{kk}\,x_k &= b_k\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

**Rešenje.** Dati sistem možemo napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1-a_{11})\,x_1 - a_{12}\,x_2 - \cdots - a_{1k}\,x_k + b_1\,,\\
x_2 &= -a_{21}\,x_1 + (1-a_{22})\,x_2 - \cdots - a_{2k}\,x_k + b_2\,,\\
&\vdots\\
x_k &= -a_{k1}\,x_1 - a_{k2}\,x_2 - \cdots + (1-a_{kk})\,x_k + b_k\,,
\end{aligned}
$$

ili ako uvedemo veličine

$$
c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}\,, \quad \text{gde je} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j\,,\\ 0 & i \neq j\,,\end{cases}
$$

u obliku

$$
x_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)\,. \tag{2}
$$

Označimo sa $R_p^k$ $(1 \le p < +\infty)$ Banachov prostor gde je:

$$
\|\boldsymbol{x}\|_p = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right\}^{1/p}
$$

za svako $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in R_p^k$ i u graničnom slučaju, kada $p \to +\infty$, Banachov prostor $R_\infty^k$ u kome je

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le j \le k} |x_j| \, .$$

Definišimo sada operator $\mathcal{T}$ sa $\boldsymbol{y} = \mathcal{T}\boldsymbol{x}$, koji preslikava prostor $R_p^k$ $(R_\infty^k)$ u samog sebe, na sledeći način: Tački $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R_p^k$ $(R_\infty^k)$ odgovara tačka $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in R_p^k$ $(R_\infty^k)$, gde su koordinate $y_i$ određene sa

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \, .$$

Nepokretne tačke preslikavanja $\mathcal{T}$ prostora $R_p^k$ $(R_\infty^k)$ u samog sebe su rešenja sistema (2). Da bismo mogli primeniti Banachov stav ostaje nam još da utvrdimo pod kojim uslovima će $\mathcal{T}$ biti kontrakcija.

Uzimajući, na primer, prostor $R_2^k$ imamo

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{T}\boldsymbol{x}_2\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, x_j^{(2)} \right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \big( x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \big) \right\}^2 , \end{aligned}$$

pa je, na osnovu Hölderove nejednakosti,[12)]

$$\|\mathcal{T}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{T}\boldsymbol{x}_2\|_2^2 \le \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \sum_{j=1}^{k} \big( x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \big)^2 \right\} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_2^2 \, ,$$

tj.

$$\|\mathcal{T}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{T}\boldsymbol{x}_2\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_2 \, .$$

---

[12)] Neka su $\alpha_k$ i $\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ proizvoljni kompleksni brojevi i neka je za $p > 1$ broj $q$ definisan sa $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Tada je za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right\}^{1/q} .$$

Specijalno, ako je $p = q = 2$, Hölderova nejednakost se svodi Bunjakowsky-Cauchy-Schwarzovu nejednakost nejednakost.

Prema tome, $\mathcal{T}$ je kontrakcija ako je

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2 < 1 \tag{3}$$

i tada sistem (2), tj. (1), ima, na osnovu Banachovog stava, jedno i samo jedno rešenje. Ono se moze dobiti, polazeći od proizvoljne tačke

$$\boldsymbol{x}_0 = \big(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}\big)\,,$$

kao granična vrednost niza koji se generiše pomoću

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \mathcal{T}\boldsymbol{x}_n \qquad (n = 0, 1, \dots)\,,$$

tj.

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, x_j^{(n)} + b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, k)\,.$$

Uslov, koji matrica $[c_{ij}]$ treba da zadovolji da bi operator $\mathcal{T}$ bio kontrakcija, zavisi od izabranog Banachovog prostora. Sam problem koji razmatramo ni po čemu ne sugeriše baš prostor $R_k^2$. Ako naš problem tretiramo u prostorima $R_1^k$ i $R_\infty^k$ dobićemo druge uslove za matricu $[c_{ij}]$.

Na primer, u prostoru $R_1^k$ biće

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{T}\boldsymbol{x}_2\|_1 = \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_1 &= \sum_{i=1}^{k} \left| y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \right| = \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\big(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}\big) \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| = \sum_{j=1}^{k} \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \\
&\le \max_{1 \le j \le k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \right\} \cdot \sum_{j=1}^{k} \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \\
&\le \max_{1 \le j \le k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \right\} \cdot \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_1\,,
\end{aligned}$$

pa se uslov da $\mathcal{T}$ bude kontrakcija svodi na

$$\sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, k\,. \tag{4}$$

U prostoru $R^k_\infty$, pak, imamo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{T}\boldsymbol{x}_2\|_\infty = \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_\infty &= \max_{1\le i\le k} \left| y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \right| \\
&= \max_{1\le i\le k} \left| \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \big( x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \big) \right| \\
&\le \max_{1\le i\le k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| \cdot \max_{1\le j\le k} \left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \\
&= \max_{1\le i\le k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| \cdot \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty \,,
\end{aligned}$$

pa je uslov da $\mathcal{T}$ predstavlja kontrakciju

$$\sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, k \,. \tag{5}$$

Dakle svaki od uslova (3), (4), (5) je samo dovoljan da $\mathcal{T}$ bude kontrakcija.

*Literatura:*

S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

**3.1.2.** Korišćenjem Banachovog stava o nepokretnoj tački, diskutovati egzistenciju rešenja nehomogene Fredholmove integralne jednačine oblika

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt + g(s) \,,$$

gde je jezgro $K(s,t)$ neprekidno u kvadratu $P = [a,b] \times [a,b]$, funkcija $g(s)$ neprekidna u $[a,b]$ i $\lambda$ realni parametar. ($x(t)$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti.)

**Rešenje.** Označimo sa $C[a,b]$ Banachov prostor funkcija $x(t)$ koje su neprekidne na segmentu $[a,b]$, $b - a < +\infty$, gde je

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)| \,.$$

Neprekidno rešenje date integralne jednačine možemo shvatiti kao nepokretnu tačku preslikavanja $y = \mathcal{T}\,x$, $x = x(t) \in C[a,b]$, određenog sa

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt + g(s) \,.$$

Da bismo koristili Banachov stav, a s obzirom da je jasno da $\mathcal{T}$ preslikava $C[a,b]$ u samog sebe, ostaje još jedino da vidimo pod kojim uslovima je $\mathcal{T}$ kontrakcija.

Ako je

$$\max_{(s,t)\in P} |K(s,t)| = M,$$

za $x_1,\ x_2 \in C[a,b]$ imamo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\,x_1 - \mathcal{T}\,x_2\| = \|y_1 - y_2\| &\le |\lambda| \int_a^b |K(s,t)||x_1(t) - x_2(t)|\,dt \\ &\le |\lambda|\,M \max_{a\le t\le b} |x_1(t) - x_2(t)|\,(b-a) \\ &= |\lambda|\,M\,(b-a)\|x_1 - x_2\|\,.\end{aligned}$$

Prema tome, ako je $|\lambda|\,M\,(b-a) < 1$, tj. $|\lambda| < 1/(M(b-a))$, $\mathcal{T}$ je kontrakcija i na osnovu Banachovog stava niz

$$x^{[k+1]}(t) = \mathcal{T}\,x^{[k]}(t) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,,$$

tj.

$$x^{[k+1]}(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,x^{[k]}(t)\,dt + g(s)\,,$$

konvergira jedinom neprekidnom rešenju nehomogene Fredholmove jednačine za bilo koju startnu vrednost $x^{[0]}(t) \in C[a,b]$.

Primetimo da je ovim stavom obezbeđeno rešenje Fredholmove jednačine samo za male vrednosti parametra $|\lambda|$.

*Literatura:*

S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

**3.1.3.** Korišćenjem Banachovog stava o nepokretnoj tački, diskutovati egzistenciju rešenja beskonačnog sistema linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \cdots\ &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \cdots\ &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \cdots\ &= b_3, \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

**Rešenje.** Sistem (1) može se predstaviti u obliku

$$x_i = \sum_{j=1}^{+\infty} c_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, 2,\ \dots\ ),$$

gde je $c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$. Pokazaćemo da ovaj sistem ima jedinstveno ograničeno rešenje $(x_1^*, x_2^*, \dots)$, tj. takvo da je

$$|x_j^*| \le M \quad \text{za svako} \quad j = 1, 2, \dots ,$$

ako je

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |c_{ij}| \le q < 1 \quad \text{i} \quad |b_i| \le B \quad (i = 1, 2, \dots), \tag{2}$$

gde konstante $q$ i $B$ ne zavise od $i$. Tada se rešenje $(x_1^*, x_2^*, \dots)$ može dobiti sukcesivnom aproksimacijom, polazeći od nekog proizvoljnog ograničenog niza brojeva $(x_1^0, x_2^0, \dots)$.

Neka je $m$ metrički prostor ograničenih nizova. U njemu ćemo definisati preslikavanje $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ koje svakom $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \in m$ pridružuje tačku $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots)$ u skupu $s$ svih nizova, pomoću jednačina

$$y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} c_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Da bismo mogli primeniti Banachov stav na preslikavanje koje je definisano u kompletnom metričkom prostoru $m$, potrebno je da pokažemo da $\boldsymbol{f}$ preslikava $m$ u $m$ i da je kontrakcija.

Pokažimo, najpre, da je ispunjen prvi uslov. Kako je $x \in m$, tj. $|x_j| \le A$, na osnovu (2), imamo

$$|y_i| \le \sum_{j=1}^{+\infty} |c_{ij}|\,|x_j| + |b_i| \le Aq + B \qquad (i = 1, 2, \dots),$$

tj. $\boldsymbol{y} \in m$.

Drugi uslov je, takođe, ispunjen. Naime, s obzirom na definiciju metrike u $m$, imamo

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) &= \sup_{1 \le i < +\infty} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \sup_{1 \le i < +\infty} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \\ &\le \sup_{1 \le i < +\infty} \left\{ \sup_{1 \le j < +\infty} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \sum_{j=1}^{+\infty} |c_{ij}| \right\} \le \sup_{1 \le j < +\infty} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \cdot q, \end{aligned}$$

gde $q$ ne zavisi od $i$. Dakle, $d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \le q\, d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, tj. $\boldsymbol{f}$ je kontrakcija.

*Literatura:*

S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

**3.1.4.** Korišćenjem Banachovog stava o nepokretnoj tački, diskutovati egzistenciju lokalnog rešenja diferencijalne jednačine prvog reda

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x) \tag{1}$$

sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$, gde funkcija $g(t, x)$ u pravougaoniku

$$P = \{(t, x) : |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\}$$

ispunjava uslove:

a) $g(t, x)$ je neprekidna, što znači i $|g(t, x)| \le M$,

b) $|g(t, x_1) - g(t, x_2)| \le K|x_1 - x_2|$.

(Ovde, $x(t)$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti.)

**Rešenje.** Pokazaćemo da pod navedenim pretpostavkama postoji (dovoljno mali) broj $h > 0$, takav da na segmentu $[t_0 - h, t_0 + h] = \Delta$ postoji jedno i samo jedno rešenje diferencijalne jednačine (1) koje zadovoljava dati početni uslov (Picardov stav).

Pre svega posmatranom problemu može se dati i ova formulacija: Pod navedenim pretpostavkama, postoji jedno i samo jedno rešenje integralne jednačine

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt. \tag{2}$$

Neka je broj $h$ takav da je

$$h < \frac{1}{K} \quad \text{i} \quad h \le \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{3}$$

Uočimo prostor $C_\Delta$ funkcija neprekidnih na segmentu $\Delta$ i u njemu onaj njegov deo $A$ za koji je

$$\max_t |x(t) - x_0| \le b.$$

S obzirom na metriku u $C_\Delta$, skup $A$ je zatvoren, jer se sastoji iz tačaka zatvorene kugle $K[x_0, b]$.

Neka je preslikavanje $y = f(x)$, $x \in A \subset C_\Delta$, definisano sa

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt. \tag{4}$$

Pokazaćemo da $f$ preslikava $A$ u samog sebe i da je kontrakcija.

Pre svega, ako je $x \in A$ i $t \in \Delta$, tačka $(t, x(t)) \in P$, tj. desna strana u (4) ima smisla i očigledno $y \in C_\Delta$. Da bismo dokazali da $y \in A$, primećujemo da je prema a) i na osnovu druge nejednakosti u (3),

$$|y(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt\right| \le M|t - t_0| \le Mh \le M\frac{b}{M} = b.$$

Neka $x_1, x_2 \in A$. Tada je za $t \in \Delta$, na osnovu b),

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} \bigl\{g[t, x_1(t)] - g[t, x_2(t)]\bigr\}\, dt\right| \\
&\le K\int_{t_0}^{t} |x_1(t) - x_2(t)|\, |dt| \\
&\le Kh \max_{t\in\Delta} |x_1(t) - x_2(t)|.
\end{aligned}$$

Prema prvoj nejednakosti u (3) imamo $Kh = q < 1$. S druge strane, na osnovu definicije rastojanja u $C_\Delta$, je $d(y_1, y_2) \le q\, d(x_1, x_2)$, tj. $f$ je kontrakcija.

Kako je prostor $C_\Delta$ kompletan, a $A$ zatvoren skup u $C_\Delta$, to je $A$ sam za sebe kompletan metrički prostor, pa su svi uslovi za primenu Banachovog stava zadovoljeni, tj. preslikavanje (1) ima jednu jedinu nepokretnu tačku, a to je jedino rešenje integralne jednačine (2), odnosno postavljenog diferencijalnog zadatka.

*Literatura:*

S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

## 3.2. Karakteristike procesa i ubrzavanje konvergencije

**3.2.1.** Dat je iterativni proces

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots), \tag{1}$$

gde je $F(x) = \sqrt{2 + x}$, $x_0 = 0$. Odrediti red konvergencije $r$ iterativnog procesa (1), kao i konstante $a$ i $K$ u formuli

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - a|}{|x_k - a|^r} = K,$$

gde je $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$.

**Rešenje.** Korišćenjem iterativnog procesa (1) dobijamo

| $k$ | $x_k$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1.4142 |
| 2 | 1.8478 |
| $\vdots$ | |
| 9 | 2.0000 |
| 10 | 2.0000 |

odakle zaključujemo da je $a = 2$.

S obzirom da je

$$2 = F(2)\,, \qquad F'(2) = \frac{1}{4}\,,$$

sleduje da iterativni proces (1) ima red konvergencije $r = 1$, pri čemu je asimptotska konstanta greške (videti [1, str. 188])

$$K = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - 2|}{|x_k - 2|} = \left|\frac{F'(2)}{1!}\right| = \frac{1}{4}\,.$$

**3.2.2.** Na ubrzavanje konvergencije iterativnog procesa

$$\text{(1)} \qquad x_{k+1} = e^{-x_k} \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

primenjen je Aitkenov $\Delta^2$ metod, pri čemu je dobijen niz $\{x_k^*\}$. Odrediti

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^* - a}{(x_k - a)^2}\,,$$

gde je $a$ koren jednaine $x\,e^x - 1 = 0$.

**Rešenje.** Datu jednačinu $x\,e^x - 1 = 0$ mozemo predstaviti u obliku $x = e^{-x}$. Ako skiciramo grafike funkcija $x \mapsto x$ i $x \mapsto e^{-x}$ nije teško uočiti da jedinstven koren date jednačine $a \in [0.2,\ 0.9]$.

S obzirom da iterativna funkcija $\Phi(x) = e^{-x}$ iterativnog procesa (1) zadovoljava uslove

1° $\Phi : [0.2,\ 0.9] \mapsto [0.2,\ 0.9]$,

2° $\Phi \in C^2[0.2,\ 0.9]$,

3° $\big|\Phi'(x)\big| < 1$ za svako $x \in [0.2,\ 0.9]$, i s obzirom da je $\Phi'(a) = -e^{-a} = -a \neq 0$ (tj. proces (1) je sa linearnom konvergencijom), sleduje (videti [1, str. 194])

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^* - a}{(x_k - a)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi''(a)\,\Phi'(a)}{\Phi'(a) - 1}\,. \tag{2}$$

Kako je $\Phi'(x) = -e^{-x}$, $\Phi''(x) = e^{-x}$, a s obzirom da je $a = \Phi(a) = e^{-a}$, imamo $\Phi'(a) = -a$, $\Phi''(x)(a) = a$, pa je na osnovu (2),

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^* - a}{(x_k - a)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{1 + a}\,.$$

Inače, prvih nekoliko članova niza $\{x_k\}$, koji se dobija na osnovu (1) i niza $\{x_k^*\}$, koji se generiše prema formuli (videti [1, str. 191]),

$$x_k^* = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}\,,$$

su dati u sledećoj tabeli

| $k$ | $x_k$ | $x_k^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.56762 |
| 1 | 0.60653 | 0.56730 |
| 2 | 0.54524 | 0.56719 |
| 3 | 0.57970 | |
| 4 | 0.56006 | |

Primetimo da $x_2^*$ aproksimira koren jednačine $x\,e^x - 1 = 0$ sa četiri tačne decimale.

**3.2.3.** Neka se niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formira na sledeći način:

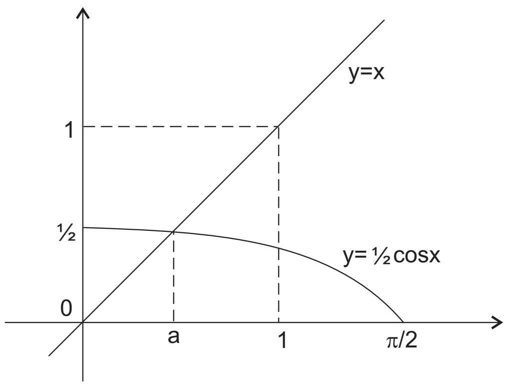
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\cos x_k, \quad x_0 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ \ldots\ . \tag{1}$$

a) Ispitati konvergenciju ovog niza; b) Kako ubrzati njegovu konvergenciju?

**Rešenje.** a) Ovde imamo

$$x = \phi(x), \quad \phi(x) = \frac{1}{2}\cos x, \quad \phi : [0, 1] \to [0, 1],$$

$$\phi'(x) = -\frac{1}{2}\sin x, \quad \left|\phi'(x)\right| < \frac{1}{2} \quad \text{na} \quad [0, 1],$$




Sl. 1.

pa na $[0,1]$ postoji fiksna tačka $a$ tako da je $\phi(a)=a$.

Startujući sa $x_0 = 1$ dobija se

$$\begin{aligned} &x_1 = 0.2701511529, && x_2 = 0.4818652841, && x_3 = 0.4430660154,\\ &x_4 = 0.4517207379, && x_5 = 0.4498486540, && x_6 = 0.4502564612,\\ &x_7 = 0.4501677605, && x_8 = 0.4501870598, && \end{aligned}$$

što znači $a \cong 0.4502$.

b) Da bismo ubrzali konvergenciju, odredimo prvo red konvergencije datog procesa. Ako je $a$ rešenje jednačine:

$$a = \frac{1}{2}\cos a,$$

tada je

$$x_{k+1} - a = \frac{1}{2}(\cos x_k - \cos a) = -\sin\frac{x_k - a}{2}\sin\frac{x_k + a}{2}\,.$$

Odavde je

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-a}{x_k - a} = \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{-\sin\dfrac{x_k - a}{2}}{\dfrac{x_k - a}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x_k + a}{2}\right] = -\frac{1}{2}\sin a \neq 0.$$

Dakle, red konvergencije datog iterativnog procesa je $r = 1$.

Naravno, do istog rezultata dolazimo ako uočimo da je $\Phi(a) = a$ i $\Phi'(a) = -\frac{1}{2}\sin a \neq 0$ (videti [1, str. 188]).

S obzirom da je red konvergencije datog procesa $r = 1$, možemo da iskoristimo Aitkenov $\Delta_2$–metod za njegovo ubrzavanje, tj.

$$x_k^* = x_{k+2} - \frac{(\Delta x_{k+1})^2}{\Delta^2 x_k} = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}, \tag{2}$$

pa dobijamo

| $k$ | $x_k$ | $x_k^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000000000 | 0.4342605307 |
| 1 | 0.2701511529 | 0.4490752079 |
| 2 | 0.4818652841 | 0.4501422780 |
| 3 | 0.4430660154 | 0.4501815848 |
| 4 | 0.4517207379 | 0.4501835162 |
| 5 | 0.4498486540 | 0.4501836068 |
| 6 | 0.4502564612 | 0.4501836111 |
| 7 | 0.4501677605 | |
| 8 | 0.4501870598 | |

Pođimo od sledeće teoreme (videti [1, str. 197]): *Neka je* $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *iterativni proces sa konvergencijom reda* $r$*, funkcija* $\Phi$ $(r+1)$*–puta diferencijabilna u okolini granične tačke* $a$ $\Big(\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a\Big)$ *i neka je* $\Phi'(a) \neq r$*. Tada je*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \Phi(x_k)}{1 - \dfrac{1}{r}\,\Phi'(x_k)}$$

*iterativni proces najmanje reda* $r + 1$.

Ovde smo naveli teoremu u njenom izvornom obliku, pa stoga odmah primetimo da je uslov $\Phi'(a) \neq r$ uvek ispunjen. Naime, ukoliko je $r = 1$, tada je $\big|\Phi'(a)\big| < 1$, a ukoliko je $r > 1$, tada je $\Phi'(a) = 0$.

Korišćenjem navedene teoreme sada dobijamo iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \phi(x_k)}{1 - \dfrac{1}{r}\phi'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \dfrac{1}{2}\cos x_k}{1 + \dfrac{1}{2}\sin x_k},$$

tj.

$$x_{k+1} = \frac{x_k \sin x_k + \cos x_k}{2 + \sin x_k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{3}$$

za koji znamo da ima red konvergencije najmanje dva.

Primenom iterativnog procesa (2) dobijamo sledeće iteracije:

| $k$ | $x_k$ |
|---|---|
| 0 | 1.0000000000 |
| 1 | 0.4862880170 |
| 2 | 0.4504186047 |
| 3 | 0.4501836215 |
| 4 | 0.4501836113 |
| 5 | 0.4501836113 |

Od posmatranih metoda najbrže konvergira metod (3), zatim (2), pa (1). Ovo postaje jasno ako imamo u vidu sledeće asimptotske jednakosti:

Metod (1): $x_{k+1} - a \approx \Phi'(a)(x_k - a) \qquad \left(|\Phi'(a)| = \left|-\dfrac{1}{2}\sin a\right| < 1\right),$

Metod (2): $x^*_{k+1} - a \approx (\Phi'(a))^2(x^*_k - a)$ (videti [1, str. 193]),

Metod (3): $x_{k+1} - a \approx C(x_k - a)^2 \qquad \left(C = \dfrac{\cos a}{2(2+\sin a)} = \dfrac{a}{2+\sin a}\right).$

Dakle, procesi (1) i (2) su sa linearnom konvergencijom (drugi sa manjom asimptotskom konstantom greške), dok je proces (3) sa kvadratnom konvergencijom.

**3.2.4.** Jednačina $f(x) = 0$ ima prost koren $x = a$ za čije se određivanje koristi iterativni proces $x_{k+1} = G(x_k)$, gde je

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + h(x)\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 . \tag{1}$$

Odrediti funkciju $h$ tako da iterativni proces ima red konvergencije najmanje tri, pri čemu je funkcija $f$ dovoljan broj puta diferencijabilna.

**Rešenje.** Zadatak ćemo rešiti na dva načina.

*Prvi način:* Da bi zadati iterativni proces imao red konvergencije najmanje tri, potrebni su sledeći uslovi (videti [1, str. 95])

$$G(a) = a\,, \quad G'(a) = G''(a) = 0.$$

S obzirom da je

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= 1 + \left(\frac{2hf}{f'} - 1\right) \frac{f'^2 - f\,f''}{f'^2} + h' \left(\frac{f}{f'}\right)^2 , \\
G''(x) &= 2\,\frac{\left(h'\,f + h\,f'\right) f' - h\,f\,f''}{f'^2}\,\frac{f'^2 - f\,f''}{f'^2} \\
&\quad + \left(\frac{2h\,f}{f'} - 1\right) \frac{\left(f' f'' - f\,f'''\right) f'^2 - 2\left(f'^2 - f\,f''\right) f'\,f''}{f'^4} \\
&\quad + h'' \left(\frac{f}{f'}\right)^2 + 2h'\,\frac{f}{f'}\left(\frac{f}{f'}\right)'
\end{aligned}
$$

i $f(a) = 0$, imamo

$$
G(a) = a, \quad G'(a) = 0, \quad G''(a) = 2h(a) + \frac{f''(a)}{f'(a)} .
$$

Iz uslova $G''(a) = 0$ nalzaimo

$$
h(a) = -\frac{f''(a)}{2f'(a)} ,
$$

pa je dakle tražena funkcija

$$
h(x) = -\frac{f''(x)}{2f'(x)} .
$$

Prethodno opisani postupak očigledno nije podesan kada treba nalaziti više izvode iterativne funkcije i kada je iterativna funkcija komlikovanija.

*Drugi način:* Pođimo sada od sledeće teoreme (videti [1, str. 197]): *Neka je* $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ $(k = 0, 1, \dots)$ *iterativni proces sa konvergencijom reda* $r\,(\geq 2)$ *i funkcija* $\Phi$ $(r+1)$*-puta diferencijabilna u okolini granične tačke* $a$ $\Big(\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a\Big)$. *Tada je*

$$
x_{k+1} = \Phi(x_k) - \frac{1}{r}\,\Phi'(x_k)\,(x_k - \Phi(x_k)) \qquad (k = 0, 1, \dots)
$$

*iterativni proces najmanje reda* $r + 1$.

S obzirom da u iterativnoj funkciji (1) prepoznajemo deo koji predstavlja iterativnu funkciju Newtonovog metoda

$$
\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} ,
$$

primenimo prethodnu teoremu i izvršimo ubrzavanje konvergencije Newtonovog iterativnog metoda koji ima red konvergencije $r = 2$.

Dakle, iterativni proces $x_{k+1} = \psi(x_k)$ $(k = 0, 1, \dots)$, gde je

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi'(x)\,(x - \varphi(x)) \\
&= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}\,\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (3) \\
&= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2
\end{aligned}$$

ima red konvergencije najmanje tri.

Upoređivanjem iterativnih funkcija (1) i (3) zaključujemo da iterativnu funkciju (1) možemo identifikovati sa iterativnom funkcijom (3) ako uzmemo

$$h(x) = -\frac{f''(x)}{2f'(x)}\,.$$

**3.2.5.** Naći red konvergencije iterativnog procesa

$$x_{k+1} = \frac{\alpha\, g(x_k) - x_k\, h(x_k)}{g(x_k) - h(x_k)} \qquad (k = 1, 2, \dots)\,, \tag{1}$$

gde su

$$g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\,, \qquad h(x) = \frac{f'(x)\, f(\alpha)}{f(x)}\,, \tag{2}$$

koji se koristi za nalaženje prostog korena $x = a$, izolovanog na segmentu $[\alpha, \beta]$, jednačine $f(x) = 0$. Uzimajući $\alpha = 0$, $x_1 = \beta = 1$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, naći $x_3$.

**Rešenje.** Poznato je da modifikovani metod sečice

$$x_{k+1} = G(x_k)\,, \tag{3}$$

gde je

$$G(x) = x - \frac{x - \alpha}{f(x) - f(\alpha)}\, f(x)\,,$$

ima red konvergencije $r = 1$ (videti [1, str. 349-350]).

Iskoristimo sada navedenu teoremu u zadatku 3.2.3 za ubrzavanje konvergencije procesa (3). Dakle, iterativni proces $x_{k+1} = F(x_k)$, gde je

$$F(x) = x - \frac{x - G(x)}{1 - G'(x)}, \tag{4}$$

ima red konvergencije najmanje 2. S obzirom da je

$$G'(x) = 1 - \frac{\big(f(x) + (x-\alpha)\, f'(x)\big)\,(f(x) - f(\alpha)) - f(x)\, f'(x)\,(x-\alpha)}{(f(x) - f(\alpha))^2},$$

na osnovu (4) dobijamo

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{f(x)\,(f(x) - f(\alpha))\,(x-\alpha)}{(f(x) + (x-\alpha)\, f'(x))\,(f(x) - f(\alpha)) - f(x)\, f'(x)(x-\alpha)} \\ &= x - \frac{f(x) - f(\alpha)}{\left(1 + (x-\alpha)\,\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right) \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f'(x)} \\ &= x - \frac{f(x) - f(\alpha)}{\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} - \dfrac{f(\alpha)\, f'(x)}{f(x)}}\,. \end{aligned}$$

Najzad, s obzirom na (2), imamo

$$F(x) = x - \frac{g(x)\,(x-\alpha)}{g(x) - h(x)} = \frac{\alpha\, g(x) - x\, h(x)}{g(x) - h(x)}\,. \tag{5}$$

Iterativna funkcija (5) predstavlja iterativnu funkciju procesa (1). Dakle, iterativni proces (1) ima red konvergencije najmanje 2.

Uzimajući $\alpha = 0,\ x_1 = \beta = 1$ za funkciju $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, korišćenjem (1), dobijamo

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1. | 1. |
| 2 | 0.3333 | 0.0370 |
| 3 | 0.3176 | 0.0016 |

# IV GLAVA

# Numerički metodi u linearnoj algebri

## 4.1. Direktni metodi u linearnoj algebri

**4.1.1.** Sistem linearnih jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -400 \\ 0.2 & -2 & -20 \\ -0.04 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

transformisati u sistem $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, tako da je $B$ simetrična matrica i $\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}$ ($D = \operatorname{diag}(1, 10, 100)$). Odrediti faktor uslovljenosti $k(B)$ matrice $B$ korišćenjem spektralne norme, a zatim, naći rešenje datog sistema rešavajući transformisani sistem Gaussovim algoritmom.

**Rešenje.** Smenom

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 10 & \\ & & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 10\,x_2 \\ 100\,x_3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

sistem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.04 & -0.02 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

Ako pomnožimo drugu i treću jednačinu sa 10, odnosno 100, dobijamo sistem $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, gde su

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Kada se koristi spektralna norma, faktor uslovljenosti je dat sa (videti [1, str. 246])

$$k(B) = \|B\|_{\mathrm{sp}} \|B^{-1}\|_{\mathrm{sp}} = \sqrt{\frac{\max \lambda(B^* B)}{\min \lambda(B^* B)}},$$

gde je $\lambda(B^*B)$ sopstvena vrednost matrice $C = B^*B$.

S obzirom da je matrica $B$ simetrična i realna, ona je i hermitska ($B^* = \bar{B}^\top = B^\top = B$). Za hermitsku matricu $B$ važi $\lambda(B^*B) = \lambda(B)^2$ te se prethodni izraz pojednostavljuje, tj. postaje

$$k(B) = \frac{\max|\lambda(B)|}{\min|\lambda(B)|}\,.$$

Iz karakteristične jednačine

$$\det(B - \lambda I) = (\lambda + 3)^2(6 - \lambda) = 0\,,$$

nalazimo sopstvene vrednosti matrice $B$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$, pa sleduje

$$k(B) = \frac{6}{3} = 2\,.$$

Poznato je da je matrica utoliko bolje uslovljena ukoliko je faktor uslovljenosti $k(B)$ bliži jedinici (videti [1, str. 246]). Inače, uvek je $k(B) \geq 1$.

Rešimo sada Gaussovim algoritmom sistem $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\,. \tag{2}$$

Najpre vršimo trougaonu redukciju: izračunavamo faktore $m_{21}=2/1=2$, $m_{31}=-4/1=-4$, zatim množimo prvu jednačinu sistema (2), koja ostaje nepromenjena, sa $m_{i1}$ i oduzimamo od $i$–te jednačine ($i = 2, 3$). Tako dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}\,. \tag{3}$$

Dalje, izračunavamo faktor $m_{32} = 6/(-6) = -1$, množimo drugu jednačinu sistema (3) i dodajemo trećoj (prva i druga jednačina ostaju nepromenjene), te dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}\,, \tag{4}$$

čime je postupak trougaone redukcije završen.

Sada sistem (4) rešavamo sukcesivno polazeći od poslednje jedačine. Dobijamo

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{9}{-9} = -1\,, \\ y_2 &= \frac{1}{-6}\,[0 - 6\cdot(-1)] = -1\,, \\ y_1 &= \frac{1}{1}\,[1 - 2\cdot(-1) - (-4)\cdot(-1)] = -1\,. \end{aligned}$$

S obzirom na smenu (1), rešenje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je dato sa

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 = -1\,, \\ x_2 &= \frac{y_2}{10} = -0.1\,, \\ x_3 &= \frac{y_3}{100} = -0.01\,. \end{aligned}$$

Napominjemo da se pri rešavanju većih sistema linearnih jednačina na računskoj mašini, preporučuju modifikacije Gaussovog metoda poznate pod nazivom *Gaussov metod sa izborom glavnog elementa* (videti [1, primer 2.2.2 na str. 231–233]) i *Gaussov metod sa totalnim izborom glavnog elementa* (videti [1, str. 233]).

**Primedba.** Preporučujemo čitaocu da odredi $k(A)$.

**4.1.2.** Gaussovom metodom sa izborom glavnog elementa rešiti sistem jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje.** Dopišimo matrici $A$ kolonu koja predstavlja elemente vektora $\boldsymbol{b}$, tj.

$$A_{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

Pristupimo sada trougaonoj redukciji matrice $A$ po Gaussovom algoritmu sa izborom glavnog elementa.

U *prvom* eliminacionom koraku pronalazimo, u *prvoj koloni* počev od *prve vrste* matrice $A_{\boldsymbol{b}}$ element koji je najveći po modulu (4), te pripadnu vrstu (III) permutujemo sa prvom, tj.

$$A_{\boldsymbol{b}} \mapsto A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{array}\right].$$

Sada izračunavamo faktore $m_{21} = \frac{3}{4}$, $m_{31} = \frac{1}{2}$, množimo prvu vrstu matrice $A_1$, koja ostaje nepromenjena, sa $m_{i1}$ i oduzimamo od $i$–te vrste ($i = 2, 3$). Tako dobijamo

$$A_1 \mapsto A_{11} = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5/4 & -1/2 & -7/4 \\ 0 & 7/2 & 5 & 3/2 \end{array}\right].$$

U *drugom* eliminacionom koraku nalazimo, u *drugoj koloni* počev od *druge vrste* matrice $A_{11}$, element koji je najveći po modulu $(7/2)$ te pripadnu vrstu (III) permutujemo sa drugom.

$$A_{11} \mapsto A_2 = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7/2 & 5 & 3/2 \\ 0 & 5/4 & -1/2 & -7/4 \end{array}\right].$$

Sada izračunavamo faktor $m_{32} = 5/14$, množimo drugu vrstu matrice $A_2$, koja ostaje nepromenjena, sa $m_{32}$ i oduzimamo od treće vrste, te dobijamo

$$A_2 \mapsto A_{22} = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7/2 & 5 & 3/2 \\ 0 & 0 & -32/14 & -32/14 \end{array}\right].$$

Ovim je završen postupak trougaone redukcije, pa na osnovu elemenata matrice $A_{22}$ imamo

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + \quad x_2 + \quad 2\,x_3 &= \quad 5\,, \\ \frac{7}{2}\,x_2 + \quad 5\,x_3 &= \quad \frac{3}{2}\,, \\ -\frac{32}{14}\,x_3 &= -\frac{32}{14}\,. \end{aligned}$$

Rešavanjem poslednjeg sistema, polazeći od poslednje jednačine ka prvoj, dobijamo $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

**4.1.3.** Odrediti inverznu matricu $X$, regularne matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pomoću Gaussovog algoritma.

**Rešenje.** Neka je

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

Vektori $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ su, redom, prva, druga, treća kolona matrice $X$. Definišimo vektore $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ pomoću

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top.$$

S obzirom na jednakost $AX = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & A\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$, problem određivanja inverzne matrice $X$ može se svesti na rešavanje tri sistema linearnih jednačina

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Za rešavanje sistema (1) pogodno je koristiti Gaussov metod, s obzirom da se matrica $A$ pojavljuje kao matrica svih sistema, pa njenu trougaonu redukciju treba izvršiti samo jednom. Na način kao što je to objašnjeno u zadatku 4.1.1, dobijamo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(simbol "$\mapsto$" označava transformaciju matrice sa leve strane simbola u matricu sa desne strane simbola), pri čemu su izračunati faktori $m_{21} = \dfrac{2}{3}$, $m_{31} = \dfrac{1}{3}$, $m_{32} = 2$.

Sada, sve elementarne transformacije koje su potrebne za trougaonu redukciju matrice $A$ treba primeniti i na vektore $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Korišćenjem faktora $m_{21}$, $m_{31}$, $m_{32}$, dobijamo

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pa sistemi (1) postaju

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

odakle jednostavno nalazimo $x_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$, sukcesivno polazeći uvek od poslednje jednačine u sistemu. Tako je

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**4.1.4.** Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 14 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Naći faktorizaciju $A = LR$, gde je $L$ donja trougaona, a $R$ gornja trougaona matrica sa jediničnom dijagonalom. Korišćenjem ove faktorizacije rešiti sistem jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde je $\boldsymbol{b} = [\,9 \quad 0 \quad 22 \quad 14\,]^\top$.

**Rešenje.** Trougaone matrice $L$ i $R$ reda $n$, imaju oblike

$$\begin{aligned} L &= \big[\ell_{ij}\big]_{n\times n} \qquad (\ell_{ij} = 0 \text{ za } i<j)\,, \\ R &= \big[r_{ij}\big]_{n\times n} \qquad (r_{ij} = 0 \text{ za } i>j)\,. \end{aligned}$$

Razlaganje matrice $A = \big[a_{ij}\big]_{n\times n}$ u obliku $A = LR$, poznato kao $LR$ faktorizacija (dekompozicija), nije jedinstveno s obzirom na jednakost

$$(\forall c \neq 0) \qquad LR = (cL)\left(\frac{1}{c}\,R\right).$$

Međutim, ako se dijagonalnim elementima matrice $R$ (ili $L$) fiksiraju vrednosti od kojih nijedna nije jednaka nuli, razlaganje je jedinstveno.

S obzirom da se zadatkom zahteva da je $r_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, 4)$, imamo (videti [1, str. 207–208])

$$\begin{aligned} &\ell_{11} = a_{11}\,, \\ &\left.\begin{aligned} r_{1i} &= \frac{a_{1i}}{\ell_{11}} \\ \ell_{i1} &= a_{i1} \end{aligned}\right\} \quad (i = 2,3,4)\,; \\ &\left.\begin{aligned} &\ell_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} r_{ki} \\ &\left.\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{\ell_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} r_{kj}\right) \\ \ell_{ji} &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{jk} r_{ki} \end{aligned}\right\} \quad (j = i+1, \ldots, 4)\,; \end{aligned}\right\} \quad (i = 2,3,4)\,, \end{aligned}$$

pa je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 3 & 2 & 5 & \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & 0 & 1 & -2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $A = LR$, sistem $A\boldsymbol{x} = \vec{b}$ sada postaje $LR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Smenom $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dobijamo

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\,,$$

odakle je, sukcesivnim rešavanjem ovog sistema polazeći od prve ka poslednjoj jednačini, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Sada rešavamo sistem

$$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\,,$$

polazeći od poslednje ka prvoj jednačini, pa je $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Napomenimo da su faktorizacioni metodi naročito pogodni za rešavanje sistema linearnih jednačina, kod kojih se matrica sistema ne menja, već samo vektor slobodnih članova $\boldsymbol{b}$. Ovakvi sistemi se često javljaju u tehnici.

**4.1.5.** Metodom kvadratnog korena rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17, \\ 0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36, \\ 0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.32, \\ 0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48. \end{aligned}$$

Računati na četiri decimale.

**Rešenje.** Matrica sistema

$$A = \begin{bmatrix} 4.32 & 0.28 & 0.57 & 0.87 \\ 0.28 & 3.84 & 0.43 & 0.62 \\ 0.57 & 0.43 & 3.42 & 0.52 \\ 0.87 & 0.62 & 0.52 & 3.30 \end{bmatrix}$$

je normalna (simetrična i pozitivno definitna), pa možemo da izvršimo njenu faktorizaciju u obliku $A = R^\top R$, gde je $R$ gornja trougaona matrica

$$R = \begin{bmatrix} r_{ij} \end{bmatrix}_{4\times 4}, \qquad r_{ij} = 0 \quad \text{za } i > j.$$

Dakle, koristeći formule:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1j} = \frac{a_{1j}}{r_{11}} \ (j = 2, 3, 4),$$

$$\left.\begin{aligned} r_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} \\ r_{ij} &= \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} \cdot r_{kj} \right) \quad (j = 3, 4) \end{aligned}\right\} \quad (i = 2, 3, 4),$$

određujemo matricu $R$

$$R = \begin{bmatrix} 2.0785 & 0.1347 & 0.2742 & 0.4186 \\ 0.0000 & 1.9550 & 0.2011 & 0.2883 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.8178 & 0.1910 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.7335 \end{bmatrix}.$$

Ako označimo vektor nepoznatih sa $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top$, a sa $\boldsymbol{b}$ vektor slobodnih članova, zadati sistem možemo pretstaviti u obliku

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

tj.

$$R^\top R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Rešimo prvo sistem jednačina

$$R^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},$$

gde je $\boldsymbol{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^\top$, tj.

$$\begin{aligned} 2.17 &= 2.0785y_1, \\ 4.36 &= 0.1347y_1 + 1.9550y_2, \\ 4.12 &= 0.2742y_1 + 0.2011y_2 + 1.8178y_3, \\ 4.48 &= 0.4186y_1 + 0.2883y_2 + 0.1910y_3 + 1.7335y_4. \end{aligned}$$

Tako dobijamo

$$y_1 = 1.0440, \ y_2 = 2.1582, \ y_3 = 1.8702, \ y_4 = 1.7673.$$

Dalje, rešimo sistem jednačina

$$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},$$

tj.

$$
\begin{aligned}
2.0785x_1 + 0.1347x_2 + 0.2742x_3 + 0.4186x_4 &= 1.0440,\\
1.9550x_2 + 0.2011x_3 + 0.2883x_4 &= 2.1582,\\
1.8178x_3 + 0.1910x_4 &= 1.8702,\\
1.7335x_4 &= 1.7673.
\end{aligned}
$$

Traženo rešenje je

$$x_1 = 0.1197,\ x_2 = 0.8588,\ x_3 = 0.9217,\ x_4 = 1.0195.$$

**4.1.6.** Za trodijagonalnu matricu

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 5 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -9 & 13 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}
$$

naći $LR$ faktorizaciju (sa jediničnom dijagonalom u $L$), a zatim naći rešenje sistema jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde je $\boldsymbol{b} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^\top$.

**Rešenje.** Neka je data trodijagonalna matrica

$$
A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & 0\\ 0 & a_3 & b_3 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n & b_n \end{bmatrix}.
$$

Ako matrica $A$ ispunjava uslov za dekompenzaciju (videti [1, str. 207] i pretpostavimo matrice $L$ i $R$ u obliku

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \alpha_2 & 1 & 0 & & 0 & 0\\ 0 & \alpha_3 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_n & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
R = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \beta_n \end{bmatrix},
$$

tada je

$$LR = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\gamma_1 + \beta_2 & \gamma_2 & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\gamma_2 + \beta_3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_n\beta_{n-1} & \alpha_n\gamma_{n-1} + \beta_n \end{bmatrix}.$$

Iz uslova $A = LR$ dobijamo sledeće formule za određivanje elemenata $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$:

$$\beta_1 = b_1\,,$$

$$\gamma_{i-1} = c_{i-1}\,, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{\beta_{i-1}}\,, \quad \beta_i = b_i - \alpha_i\gamma_{i-1} \qquad (i = 2, \dots, n)\,.$$

Na osnovu predhodnog, za matricu $A$ datu zadatkom, nalazimo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ & 3 & -2 & & \\ & & -3 & 5 & \\ & & & -2 & -4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sada postaje $LR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Smenom $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dobijamo $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, odakle je $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^\top$, a dalje iz $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ nalazimo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1/3 & 7/3 & 9/2 & 5/2 & -2 \end{bmatrix}^\top.$$

**4.1.7.** Dato je

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 & -13 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & -6 & 12 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Primenom Gaussovog algoritma sa izborom glavnog elementa, odrediti permutacionu matricu $P$ i donju i gornju trougaonu matricu $L$ i $R$ u faktorizaciji $LR = PA$. Naći rešenje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ korišćenjem dobijene faktorizacije.

**Rešenje.** Pristupimo trougaonoj redukciji matrice $A$ po Gaussovom algoritmu sa izborom glavnog elementa.

U *prvom* eliminacionom koraku pronalazimo, u *prvoj koloni* počev od *prve vrste* matrice,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 & -13 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & -6 & 12 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix},$$

element koji je najveći po modulu (6), te odgovarajuću vrstu (III) permutujemo sa *prvom*, tj.

$$A \mapsto A_1 = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & -11 & -13 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Iz razloga "pamćenja" permutacije koja se vrši nad vrstama matrice sistema, uvodimo indeksni niz glavnih elemenata, $I = (p_1,\ p_2,\ p_3)$, pri čemu je $p_k$ broj vrste iz koje se uzima glavni element u $k$–tom eliminacionom koraku.

Dakle, u našem slučaju, $p_1 = 3$. Dalje, izračunavamo faktore $m_{21} = 1/3$, $m_{31} = -1/2$, $m_{41} = 1/2$, koje upisujemo na mesto elemenata matrice $A_1$ koji se anuliraju po Gaussovom algoritmu u prvom eliminacionom koraku, te dobijamo

$$A_1 \mapsto A_{11} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ \boxed{1/3} & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{-1/2} & 2 & -5 & -1 \\ \boxed{1/2} & 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

U *drugom* eliminacionom koraku pronalazimo u *drugoj koloni* počev od *druge vrste* matrice $A_{11}$, element koji je najveći po modulu (4), te pripadnu vrstu (IV) permutujemo sa *drugom*, tj.

$$A_{11} \mapsto A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ \boxed{1/2} & 4 & -8 & -4 \\ \boxed{-1/2} & 2 & -5 & -1 \\ \boxed{1/3} & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pa je $p_2 = 4$. Sada izračunavamo faktore $m_{32} = 1/2$, $m_{42} = 1/4$, koje upisujemo na mesto elemenata matrice $A_2$ koji se anuliraju po Gaussovom algoritmu u drugom eliminacionom koraku, te dobijamo

$$A_2 \mapsto A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ \boxed{1/2} & 4 & -8 & -4 \\ \boxed{-1/2} & \boxed{1/2} & -1 & 1 \\ \boxed{1/3} & \boxed{1/4} & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Primetimo da uokvireni elementi matrice $A_2$ ne podležu transformaciji pri Gaussovoj redukciji).

Na osnovu prethodno rečenog, jasan je postupak i u *trećem* eliminacionom koraku, tj.

$$
\begin{aligned}
A_{22} \mapsto A_3 &= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ \boxed{1/2} & 4 & -8 & -4 \\ \boxed{1/3} & \boxed{1/4} & 2 & 0 \\ \boxed{-1/2} & \boxed{1/2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mapsto A_{33} &= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ \boxed{1/2} & 4 & -8 & -4 \\ \boxed{1/3} & \boxed{1/4} & 2 & 0 \\ \boxed{-1/2} & \boxed{1/2} & \boxed{-1/2} & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$p_3 = 4$, čime je završen postupak trougaone redukcije matrice $A$ po Gaussovom algoritmu.

Na osnovu dobijenog indeksnog niza $I = (3,\ 4,\ 4)$ možemo konstruisati permutacionu matricu $P$. Dakle,

$$
P = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \,,
$$

gde je $P_k$ matrica koja nastaje transformacijom jedinične matrice, tako što se jedinica iz $k$–te vrste pomera duž vrste i dolazi u kolonu $p_k$, a jedinica u $p_k$-toj vrsti se pomera duž vrste i dolazi u kolonu $k$. Na osnovu rečenog imamo

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad
P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

pa je

$$
P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Matrice $L$ i $R$ dobijamo na osnovu matrice koja je nastala kao krajnji produkt trougaone redukcije ($A_{33}$). Matrica $L$ ima za svoje elemente, elemente matrice $A_{33}$ ispod glavne dijagonale, na dijagonali su jedinice, a iznad glavne dijagonale su nule. Matrica $R$ se sastoji od elemenata matrice $A_{33}$ iznad i na glavnoj dijagonali, a ispod glavne dijagonale su nule. Dakle,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je

$$LR = A',$$

gde se matrica $A'$ dobija iz matrice $A$ konačnim brojem razmena vrsta, tj. $A' = PA$.

Za rešavanje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, posle učinjene faktorizacije treba, u skladu sa indeksnim nizom $I$, permutovati koordinate vektora $\boldsymbol{b}$, pri čemu dobijamo transformisani vektor $\boldsymbol{b}'$. S obzirom da je $I = (3,\ 4,\ 4)$, imamo

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \overset{p_1=3}{\mapsto} \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \overset{p_2=4}{\mapsto} \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \overset{p_3=4}{\mapsto} \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\boldsymbol{b}'$ možemo dobiti i na osnovu $\boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$. Sada sistem jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj.

$$PA\,\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}, \quad LR\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}',$$

svodimo na sukcesivno rešavanje trougaonih sistema

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}' \qquad \text{i} \qquad R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Iz $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}'$, sukcesivnim rešavanjem od prve ka poslednjoj jednačini, dobijamo $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -6 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Najzad, na osnovu $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, sukcesivnim rešavanjem od poslednje jednačine ka prvoj, dobijamo $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Primetimo da za rešavanje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ovakvom procedurom, nije potrebno poznavati (izračunavati) matricu $P$ ako znamo indeksni niz $I$. Pogotovu je korišćenje matrice $P$ nepodesno sa stanovišta primene ovakvog algoritma na računskoj mašini s obzirom na nepotrebno zauzeće memorijskog prostora.

**4.1.8.** Primenom Gaussovog metoda eliminacije sa izborom glavnog elementa naći $LR$ faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 12 & 16 \\ 3 & 10 & 27 & 40 \\ 4 & 12 & 16 & 80 \end{bmatrix},$$

gde je $L$ donja trougaona matrica, a $R$ gornja trougaona matrica sa jedinicama na dijagonali. Zatim, korišćenjem dobijene faktorizacije, rešiti sistem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde je $\boldsymbol{b} = [-12 \; -36 \; 2 \; -24]^\top$.

**Rešenje.** Primenom Gaussovog metoda sa izborom glavnog elementa na matricu $A$ dobijamo redom

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ 2 & 6 & 12 & 16 \\ 3 & 10 & 27 & 40 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ \boxed{1/2} & 0 & 4 & -24 \\ \boxed{3/4} & 1 & 15 & -20 \\ \boxed{1/4} & -1 & -1 & -15 \end{bmatrix}
$$

$$
\mapsto
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ \boxed{3/4} & 1 & 15 & -20 \\ \boxed{1/2} & 0 & 4 & -24 \\ \boxed{1/4} & -1 & -1 & -15 \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ \boxed{3/4} & 1 & 15 & -20 \\ \boxed{1/2} & \boxed{0} & 4 & -24 \\ \boxed{1/4} & \boxed{-1} & 14 & -35 \end{bmatrix}
$$

$$
\mapsto
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ \boxed{3/4} & 1 & 15 & -20 \\ \boxed{1/4} & \boxed{-1} & 14 & -35 \\ \boxed{1/2} & \boxed{0} & 4 & -24 \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ \boxed{3/4} & 1 & 15 & -20 \\ \boxed{1/4} & \boxed{-1} & 14 & -35 \\ \boxed{1/2} & \boxed{0} & \boxed{2/7} & -14 \end{bmatrix}.
$$

Faktori eliminacije su

$$
\begin{aligned}
&m_{21} = \frac{1}{2}, \quad m_{31} = \frac{3}{4}, \quad m_{41} = \frac{1}{4}, \\
&m_{32} = 0, \quad m_{42} = -1, \\
&m_{43} = \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

Faktorizacija je, dakle, data u obliku

$$
A' = L'R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 80 \\ 0 & 1 & 15 & -20 \\ 0 & 0 & 14 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}.
$$

Dalje, važi $A' = L'R' = L'IR' = L'DD^{-1}R'$, gde je $D = \operatorname{diag}(4, 1, 14, -14)$.

Ako označimo $L = L'D,\ R = D^{-1}R'$, gde je $D^{-1} = \operatorname{diag}(1/4, 1, 1/14,\ -1/14)$, imamo da je

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 14 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -14 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 15 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A' = LR = \boldsymbol{b}'$, gde je $\boldsymbol{b}' = [-24\ 2\ -12\ -36]^\top$. Najzad, imamo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' \iff L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}' \text{ i } R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},$$

tj.

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}' \iff \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 14 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 2 \\ -12 \\ -36 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 15 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ -30 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## 4.2. Iterativni metodi u linearnoj algebri

**4.2.1.** Neka je

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = B\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\beta} \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

iterativni proces za rešavanje sistema linearnih jednačina

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}. \tag{2}$$

Ako je $\boldsymbol{x}^{(0)}$ proizvoljan vektor, $\|B\| < 1$, dokazati da, za svako $k \in \mathbb{N}$, važi

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\, \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|. \tag{3}$$

Korišćena norma matrice je saglasna sa izabranom normom vektora.

**Rešenje.** Ako od (1) oduzmemo (2), dobijamo

$$\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x} = B\big(\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{x}\big)$$

a dalje, ako označimo vektor greške u $k$–toj iteraciji sa $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}$, imamo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = B\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}. \tag{4}$$

Ako stavimo da je $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}$, tada je

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)}. \tag{5}$$

Na osnovu (4) i (5), imamo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = B\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)}\big),$$

odakle je

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = -\,(I - B)^{-1}\,B\,\boldsymbol{\delta}^{(k)},$$

s obzirom da postoji inverzna matrica matrice $(I - B)$, što sleduje iz uslova da je $\|B\| < 1$.

Ako koristimo normu matrice saglasnu sa normom vektora, iz poslednje jednakosti dobijamo

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\| \le \|(I - B)^{-1}B\|\,\|\boldsymbol{\delta}^{(k)}\|. \tag{6}$$

Iz jednakosti

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \cdots \qquad (\|B\| < 1)$$

sleduje

$$(I - B)^{-1}B = B + B^2 + \cdots,$$

tj.

$$\|(I - B)^{-1}B\| \le \|B\| + \|B\|^2 + \cdots = \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}. \tag{7}$$

Kako je $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}$, na osnovu (6) i (7) dobijamo

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\,\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|,$$

što je i trebalo dokazati.

**4.2.2.** Metodom proste iteracije, ukoliko je metod konvergentan, naći približno rešenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2\,x_1 - 0.30\,x_2 + 7\,, \\ x_2 &= 0.4\,x_1 + 0.15\,x_2 + 6.5\,. \end{aligned}$$

**Rešenje.** Dati sistem možemo predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\,, \tag{1}$$

gde je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.30 \\ 0.4 & 0.15 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.5 \end{bmatrix}.$$

Jedan od najprostijih stacionarnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina (1) je metod proste iteracije

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = B\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\beta}\,. \tag{2}$$

Ako je $\boldsymbol{x}^{(0)}$ proizvoljan vektor, dovoljan uslov za konvergenciju procesa (2) je da bilo koja norma matrice $B$ bude manja od jedinice (videti [1, str. 252]). S obzirom da je $\|B\|_\infty = 0.55 < 1$, sleduje da je proces (2) konvergentan. (Napominjemo da u slučaju $\|B\| \geq 1$, na osnovu te činjenice, ne možemo zaključuti da proces (2) nije konvergentan).

Da bismo primenili (2) predstavimo ga u skalarnom obliku, tj.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k)} &= 0.2\,x_1^{(k-1)} - 0.3\;\; x_2^{(k-1)} + 7 \\ x_2^{(k)} &= 0.4\,x_1^{(k-1)} + 0.15\,x_2^{(k-1)} + 6.5 \end{aligned}\right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{3}$$

Iako smo napomenuli da je $\boldsymbol{x}^{(0)}$ proizvoljan vektor, u primenama se često uzima da je

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 7 \\ \\ 6.5 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Kao i kod svih iterativnih procesa, pored metoda i potrebnih startnih vrednosti, neophodan je i kriterijum završetka procesa. Najčešće se zadaje neko $\varepsilon$, tako da je $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$. Pri korišćenju računara, često se pored ovog uslova, unapred fiksira i broj iteracija takav da, ukoliko nismo učinili neku semantičku (logičku) grešku, proces postigne tačnost $\varepsilon$ sa manjim brojem iteracija od fiksiranog. Ovaj dodatni uslov obezbeđuje siguran završetak programa i u slučajevima kada proces ne konvergira iz nekog razloga.

Neka je, u našem slučaju, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$. Primenimo metod (3) sa startnim vektorom (4). Tako dobijamo

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ |
|---|---|---|
| 0 | 7. | 6.5 |
| 1 | 6.450 | 10.275 |
| 2 | 5.208 | 10.621 |
| 3 | 4.855 | 10.176 |
| 4 | 4.918 | 9.968 |
| 5 | 4.993 | 9.962 |
| 6 | 5.010 | 9.992 |
| 7 | 5.005 | 10.003 |
| 8 | 5.000 | 10.002 |

pri čemu su svi rezultati zaokruženi na tri decimale. S obzirom da je

$$\|\boldsymbol{x}^{(8)} - \boldsymbol{x}^{(7)}\|_\infty = 5 \cdot 10^{-3} = \varepsilon,$$

za približno rešenje zadatog sistema linearnih jednačina uzimamo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cong \boldsymbol{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} 5.000 \\ 10.002 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu nejednakosti (3) iz prethodnog zadatka, važi ocena

$$\|\boldsymbol{x}^{(8)} - \boldsymbol{x}\|_\infty = \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|\boldsymbol{x}^{(8)} - \boldsymbol{x}^{(7)}\| \cong 0.006\,.$$

Svakako, lako je ustanoviti u ovom jednostavnom primeru da je tačno rešenje $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}^\top$.

**4.2.3.** Utvrditi da li je sistem linearnih jednačina $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}$, gde je

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1.25 & -1.5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

moguće rešiti metodom proste iteracije. Ako jeste, odrediti $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}$ uzimajući $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}$.

**Rešenje.** Najpre utvrdimo da li je ovaj metod konvergentan. Norme matrice $B$ imaju vrednosti

$$\begin{aligned}\|B\|_\infty &= \max\{0.5+1, 1.25+1.5\} = 2.75,\\ \|B\|_1 &= \max\{0.5+1.25, 1+1.5\} = 2.5,\\ \|B\|_2 &= \sqrt{0.5^2+1^2+1.25^2+1.5^2} = 2.25.\end{aligned}$$

Ni jedna od ovih normi matrice $B$ nije manja od jedinice, pa dakle nije ispunjen dovoljan uslov za konvergenciju odgovarajućeg metoda proste iteracije.

Da bismo proverili potrebne i dovoljne uslove nađimo spektralni radijus matrice $B$. Karakteristična jednačina matrice $B$ je

$$\begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 1 \\ -1.25 & -1.5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2+\lambda+0.5=0.$$

Koreni karakteristične jednačine su $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5i$, spektralni radijus je $\varrho(B) = \sqrt{0.5^2+0.5^2} = 0.7071 < 1$. Dakle, metod proste iteracije, za sistem iz ovog zadatka, konvergira. Za određivanje $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}$ pri startnoj vrednosti $\overrightarrow{x}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}$ koristimo iterativni proces

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B\,\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\beta} \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Tako dobijamo

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.25 \end{bmatrix}.$$

Radi ilustracije navodimo tabelu suksesivnih aproksimacija $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(9)}$:

| $\boldsymbol{x}^{(0)}$ | $\boldsymbol{x}^{(1)}$ | $\boldsymbol{x}^{(2)}$ | $\boldsymbol{x}^{(3)}$ | $\boldsymbol{x}^{(4)}$ | $\boldsymbol{x}^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.25 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ -1.25 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.625 \end{bmatrix}$ |

| $\boldsymbol{x}^{(6)}$ | $\boldsymbol{x}^{(7)}$ | $\boldsymbol{x}^{(8)}$ | $\boldsymbol{x}^{(9)}$ | $\ldots$ | $\boldsymbol{x}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2.25 \\ -1.25 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.875 \\ -0.9375 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ -0.9375 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.0625 \\ -0.9940 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ |

Uočavamo konvergenciju niza suksesivnih aproksimacija ka tačnom rešenju

$$\boldsymbol{x}^* = [2 \quad -1]^\top.$$

**4.2.4.** Dokazati da se na rešavanje sistema linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
10\,x_1 + 3\,x_2 - \phantom{10}\,x_3 &= 12\,, \\
-\,x_1 + 5\,x_2 - \phantom{10}\,x_3 &= \phantom{1}3\,, \\
x_1 + 2\,x_2 + 10\,x_3 &= 13\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

može primeniti Jacobiev iterativni metod, a zatim, primenom ovog metoda, odrediti prvih pet iteracija.

**Rešenje.** Dati sistem možemo predstaviti u obliku

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \tag{2}
$$

gde su

$$
A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}.
$$

Sa datog sistema (2) pređimo na oblik

$$
\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\,, \tag{3}
$$

na osnovu koga formiramo, jednostavno, metod proste iteracije

$$
\boldsymbol{x}^{(k)} = B\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\beta}\,.
$$

Prelaz sa oblika (2) na oblik (3) nije jedinstven. Jedan način prelaza i formiranja metoda proste iteracije, koji ćemo sada izložiti, poznat je kao Jacobiev metod.

Neka je

$$
D = \operatorname{diag}(A) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}
$$

Na osnovu (2), imamo

$$
D\boldsymbol{x} = -(A - D)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,,
$$

tj.

$$
\boldsymbol{x} = -D^{-1}(A - D)\,\boldsymbol{x} + D^{-1}\boldsymbol{b}\,, \tag{4}
$$

što podrazumeva regularnost matrice $D$.

Na osnovu (4) formiramo metod proste iteracije

$$
\boldsymbol{x}^{(k)} = -D^{-1}(A - D)\,\boldsymbol{x}^{(k-1)} + D^{-1}\boldsymbol{b}\,, \tag{5}
$$

koji je poznat kao Jacobiev metod.

Za ispitivanje konvergencije Jacobievog metoda (6), za rešavanje sistema jednačina (2), poslužimo se teoremom L. Collatza o dominantnosti glavne dijagonale matrice $A = \left[a_{ij}\right]$ (videti [1, str. 266]). (Napomenimo da ova teorema daje dovoljne uslove za konvergenciju, što će reći, da ako ti uslovi nisu ispunjeni, pitanje konvergencije ostaje otvoreno). Dakle, s obzirom da je

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= 10 > |a_{12}| + |a_{13}| = 4\,, \\ |a_{22}| &= \ \ 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = 2\,, \\ |a_{33}| &= 10 > |a_{31}| + |a_{32}| = 3\,, \end{aligned}$$

i kako $A$ ne sadrži nula–submatricu tipa $1 \times 2$ ili $2 \times 1$, zaključujemo da su uslovi teoreme ispunjeni, te iterativni proces (5), za rešavanje sistema (2), konvergira.

Primetimo da sa sistema (1) možemo preći na sistem (4), odnosno (5), ali u skalarnom obliku, na taj način što $i$–tu jednačinu sistema (1) rešimo po $x_i$ ($i = 1,2,3$). Tada nepoznatim na levoj strani pridružimo indeks $(k)$, a na desnoj strani indeks $(k-1)$. Tako dobijamo

$$\text{(6)} \qquad \left.\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.3\,x_2^{(k-1)} + 0.1\,x_3^{(k-1)} + 1.2 \\ x_2^{(k)} &= \ \ 0.2\,x_1^{(k-1)} + 0.2\,x_3^{(k-1)} + 0.6 \\ x_3^{(k)} &= -0.1\,x_1^{(k-1)} - 0.2\,x_2^{(k-1)} + 1.3 \end{aligned}\right\} \qquad (k = 1,2,\dots).$$

Startni vektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ je proizvoljan. Polazeći od $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.6 & 1.3 \end{bmatrix}^\top$, na osnovu (6), za $k = 1,2,\dots,5$, dobijamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1.150000 & 1.100000 & 1.060000 \end{bmatrix}^\top, \\ \boldsymbol{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0.976000 & 1.042000 & 0.965000 \end{bmatrix}^\top, \\ \boldsymbol{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0.983900 & 0.988200 & 0.994000 \end{bmatrix}^\top, \\ \boldsymbol{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 1.002940 & 0.995580 & 1.003970 \end{bmatrix}^\top, \\ \boldsymbol{x}^{(5)} &= \begin{bmatrix} 1.001723 & 1.001382 & 1.000590 \end{bmatrix}^\top. \end{aligned}$$

Primetimo da je tačno rešenje sistema (1) dato sa $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

**4.2.5.** Gauss–Seidelovim metodom, ukoliko je on konvergentan, naći približno rešenje sistema linearnih jednačina iz zadatka 4.2.2

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2\,x_1 - 0.3\ \ x_2 + 7\,, \\ x_2 &= 0.4\,x_1 + 0.15\,x_2 + 6.5\,. \end{aligned}$$

**Rešenje.** Gauss–Seidelov metod se dobija modifikacijom metoda proste iteracije. Kao što smo videli kod metoda proste iteracije (zadatak 4.2.2), vrednost $i$–te komponente $x_i$ vektora $\boldsymbol{x}$ u $k$–toj iteraciji izračunava se na osnovu vrednosti komponenata vektora $\boldsymbol{x}$ iz $k-1$ iteracije. Modifikacija, koja dovodi do Gauss–Seidelovog metoda, se sastoji u tome što pri izračunavanju $i$–te komponente vektora $\boldsymbol{x}$ u $k$–toj iteraciji koristimo komponente vektora $\boldsymbol{x}$, takođe, u $k$–toj iteraciji koje su već izračunate, a preostale komponente vektora $\boldsymbol{x}$ uzimamo iz $k-1$ $(k = 1, 2, \dots)$ iteracije, tj.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= 0.2\,x_1^{(k-1)} - 0.3\;x_2^{(k-1)} + 7\,, \\
x_2^{(k)} &= 0.4\,x_1^{(k)} \qquad + 0.15\,x_2^{(k-1)} + 6.5\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

za $k = 1, 2, \dots$ .

Gauss–Seidelov iterativni proces (2) se može predstaviti i u matričnoj formi. U tom cilju, sistem (1) predstavimo u obliku

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\,,$$

gde su

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.4 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.5 \end{bmatrix}.$$

Neka je $B = B_1 + B_2$, gde su

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Tada (2) postaje

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = B_1\boldsymbol{x}^{(k)} + B_2\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\beta} \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{3}$$

Pri proizvoljnom vektoru $\boldsymbol{x}^{(0)}$, potrebni i dovoljni uslovi za konvergenciju procesa (3), tj. (2), su da svi koreni jednačine

$$P(\lambda) = \det\,[B_2 - (I - B_1)\lambda] = \begin{vmatrix} 0.2 - \lambda & -0.3 \\ 0.4\lambda & 0.15 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

budu po modulu manji od jedinice (videti [1, str. 263–265]). S obzirom da polinom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 0.23\lambda + 0.03 = 0$$

ima nule $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}(0.23 \pm i\sqrt{0.067})$ za koje važi $|\lambda_{1,2}|^2 = 0.03 < 1$, zaključujemo da je proces (2) konvergentan.

Polazeći od $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 7 & 6.5 \end{bmatrix}^\top$, korišćenjem metoda (2) uz kriterijum završetka procesa $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty \le 5 \cdot 10^{-3}$, dobijamo sledeće iteracije (rezultati su zaokruženi na tri decimale):

(4)

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 6.5 |
| 1 | 6.450 | 10.055 |
| 2 | 5.274 | 10.118 |
| 3 | 5.019 | 10.025 |
| 4 | 4.996 | 10.002 |
| 5 | 4.999 | 10.000 |

S obzirom da je $\|B\|_\infty = 0.55 < 1$, važi ocena (videti [1, str. 270])

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_\infty \le \frac{\|B_2\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty .$$

S obzirom da su $\|B_2\|_\infty = 0.5$ i $\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\|_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$, na osnovu prethodne nejednakosti, zaključujemo da je

$$\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}\| \le 3 \cdot 10^{-3} .$$

Inače, tačno rešenje sistema (1) je $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}^\top$.

Upoređivanjem rezultata (4) sa odgovarajućim rezultatima iz zadatka 4.2.2, lako uočavamo da, u ovom slučaju, Gauss–Seidelov metod brže konvergira nego metod proste iteracije, što je i najčešće slučaj. No mogući su i slučajevi gde metod proste iteracije konvergira, a Gauss–Seidelov ne, i obrnuto. Naravno, moguće su i situacije gde oba metoda ne konvergiraju.

**4.2.6.** Dat je sistem linearnih jednačina

(1)
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10. \end{aligned}$$

Formirati Gauss–Seidelov metod (varijanta Nekrasova) i ispitati njegovu konvergenciju.

**Rešenje.** Sistem (1) možemo napisati u matričnoj formi

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gde su

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&1&3\\0&5&2&-1\\1&-2&3&1\\1&-1&3&4\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\0\\4\\10\end{bmatrix}.$$

Ako stavimo

$$A=C_1+D+C_2\,,$$

gde su

$$C_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&-2&0&0\\1&-1&3&0\end{bmatrix},\ D=\operatorname{diag}(A)\,,\ C_2=\begin{bmatrix}0&-1&1&3\\0&0&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

može se obrazovati Gauss–Seidelov metod (varijanta Nekrasova)

$$\text{(2)}\qquad \boldsymbol{x}^{(k)}=-D^{-1}C_1\,\boldsymbol{x}^{(k)}-D^{-1}C_2\,\boldsymbol{x}^{(k-1)}+D^{-1}\boldsymbol{b}\qquad (k=1,2,\dots)\,.$$

Primetimo da na osnovu (1) možemo direktno formirati metod Nekrasova, tako što $i$–tu jednačinu rešimo po $x_i$ $(i=1,2,3,4)$ i tada formiramo iterativni proces po ideji Gauss–Seidela (videti zadatak 4.2.5). Tako, ili na osnovu (2), dobijamo

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}
x_1^{(k)}&=\frac{1}{5}x_2^{(k-1)}-\frac{1}{5}x_3^{(k-1)}-\frac{3}{5}x_4^{(k)}+\frac{2}{5},\\
x_2^{(k)}&=-\frac{2}{5}x_3^{(k-1)}+\frac{1}{5}x_4^{(k-1)},\\
x_3^{(k)}&=-\frac{1}{3}x_1^{(k)}+\frac{2}{3}x_2^{(k)}-\frac{1}{3}x_4^{(k-1)}+\frac{4}{3},\\
x_4^{(k)}&=-\frac{1}{4}x_1^{(k)}+\frac{1}{4}x_2^{(k)}-\frac{3}{4}x_3^{(k)}+\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Pri proizvoljnom vektoru $\boldsymbol{x}^{(0)}$, iterativni proces (2), tj. (3), konvergira ako i samo ako su svi koreni jednačine

$$\text{(4)}\qquad P(\lambda)=\det\,[C_2+(D+C_1)\lambda]=\begin{vmatrix}5\lambda&-1&1&3\\0&5\lambda&2&-1\\\lambda&-2\lambda&3\lambda&1\\\lambda&-\lambda&3\lambda&4\lambda\end{vmatrix}=0$$

po modulu manji od jedinice (videti [1, str. 265]).

Ovi, takozvani, spektralni uslovi za konvergenciju iterativnih procesa, i pored toga što imaju snagu potrebnih i dovoljnih uslova, nepodesni su za praktičnu primenu s obzirom da dovode do problema rešavanja algebarske jednačine

$$P(\lambda) = 0\,. \tag{5}$$

Na osnovu (4) je očigledno da sa povećanjem broja jednačina u sistemu koji rešavamo, raste i stepen algebarske jednačine. S druge strane, prema Abelovom stavu, algebarska jednačina (5) čiji je stepen $n > 4$ ne može se, u opštem slučaju, rešiti analitički (tj. pomoću radikala). Dakle, kod većih sistema bi trebalo rešavati jednačinu (5) numeričkim metodama (približno), što je problem za sebe, katkad komplikovaniji od primarnog problema rešavanja sistema linearnih jednačina. Međutim, rešavanje jednačine (5) se može izbeći jednom transformacijom o kojoj će sada biti reči.

Dakle, posmatrajmo algebarsku jednačinu

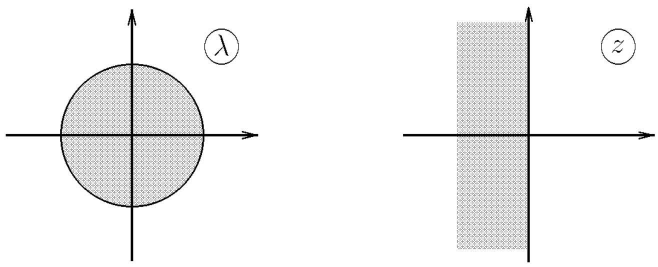
$$P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \tag{6}$$

i ispitajmo da li su njeni koreni po modulu manji od jedinice, tj. da li se nalaze unutar jediničnog kruga u $\lambda$–kompleksnoj ravni.

Bilinearnom transformacijom

$$\lambda \mapsto z(\lambda) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\,, \tag{7}$$

unutrašnjost jediničnog kruga u $\lambda$–kompleksnoj ravni se preslikava u poluravan $\operatorname{Re}\{z\} < 1$ u $z$–kompleksnoj ravni (slika 1).




Sl. 1.

Ako iskoristimo transformaciju (7) za $P(\lambda)$ iz (6), dobijamo

$$P\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1}{(z-1)^n}\Big\{p_0(z+1)^n + p_1(z+1)^{n-1}(z-1) + \cdots + p_n(z-1)^n\Big\}\,,$$

tj. posle sređivanja,

$$Q(z) = (z-1)^n P\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\,, \tag{8}$$

gde su

$$a_\nu = f_\nu(p_0, \ldots, p_n) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Dakle, ako je polinom $P(\lambda)$ imao nule unutar jediničnog kruga u $\lambda$–kompleksnoj ravni, tada polinom $Q(z)$ ima nule sa realnim delom manjim od nule, tj. polinom $Q(z)$ je Hurwitzov. (Napomenimo da Hurwitzovi polinomi imaju veliki značaj u tehnici.)

Ako je $a_0 > 0$, polinom (8) je Hurwitzov ako i samo ako su sve veličine

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & & a_{2n-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}_{n\times n} \tag{9}$$

pozitivne, pri čemu je $a_j = 0$ $(j > n)$.

Vratimo se sada ispitivanju konvergencije procesa (2), tj. (3). Na osnovu (4) je

$$P(\lambda) = \lambda\, P_1(\lambda)\,,$$

gde je $P_1(\lambda) = 300\,\lambda^3 - 20\,\lambda + 2$, odakle zaključujemo da će proces (3) konvergirati ako su nule polinoma $P_1(\lambda)$ unutar jediničnog kruga.

Korišćenjem transformacije (7), imamo

$$Q(z) = (z-1)^3\, P_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3\,,$$

gde su $a_0 = 282$, $a_1 = 914$, $a_2 = 926$, $a_3 = 278$.

Kako je $a_0 = 282 > 0$, na osnovu (9), zaključujemo da je polinom $Q(z)$ Hurwitzov jer su

$$a_1 = 914 > 0\,, \quad a_1 a_2 - a_3 a_0 = 767968 > 0\,, \quad a_3 = 278 > 0\,.$$

S obzirom da je polinom $Q(z)$ Hurwitzov, tj. da su mu sve nule sa realnim delom manjim od nule, to dalje znači da polinom $P_1(\lambda)$ ima nule sa modulom manjim od jedinice. Dakle, proces (2), tj. (3), je konvergentan.

*Literatura:*

G.V. Milovanović, R.Ž. Đorđević: *Matematika za studente tehničkih fakulteta, I deo.* Čuperak plavi, Niš, 1996.

**4.2.7.** Dati sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 1.3x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 &= \phantom{-}1.0, \\ -0.1x_1 + 0.9x_2 \phantom{+ 0.1x_3} &= \phantom{-}0.8, \\ 0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.8x_3 &= -0.9, \end{aligned}$$

transformisati na oblik pogodan za upotrebu metoda proste iteracije i Gauss–Seidelovog metoda.

a) Pokazati da, u tom slučaju, oba metoda konvergiraju i naći $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$, $\boldsymbol{x}^{(3)}$ pri izboru $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

b) Utvrditi, koliko je iteracija (teoretski) potrebno izračunati pri korišćenju metoda proste iteracije da bi važila ocena $\|\boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$ ($\boldsymbol{x}^{*}$ je tačno rešenje zadatog sistema).

**Rešenje.** Zadati sistem transformišimo na jedan od oblika koji je pogodan za korišćenje metoda proste iteracije i Gauss–Seidelovog metoda:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.3x_1 + 0.2x_2 - 0.1x_3 + 1, \\ x_2 &= \phantom{-}0.1x_1 + 0.1x_2 \phantom{- 0.1x_3} + 0.8, \\ x_3 &= -0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 - 0.9. \end{aligned}$$

a) Odredimo najpre $\|\cdot\|_\infty$ normu matrice

$$B = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}: \qquad \|B\|_\infty = \max\{0.6, 0.2, 0.7\} = 0.7.$$

Kako je norma manja od jedinice to oba navedena metoda konvergiraju.

Pri izračunavanju aproksimacija metodom proste iteracije koristimo formule

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.3x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} &= \phantom{-}0.1x_1^{(k)} + 0.1x_2^{(k)} \phantom{- 0.1x_3^{(k)}} + 0.8 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k)} + 0.3x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} - 0.9 \end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

a Gauss–Seidelovim iteracionim metodom, formule

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.3x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} &= \phantom{-}0.1x_1^{(k+1)} + 0.1x_2^{(k)} \phantom{- 0.1x_3^{(k)}} + 0.8 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k+1)} + 0.3x_2^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} - 0.9 \end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Rezultati dobijeni metodom proste iteracije prikazani su u prvoj, a Gauss-Seidelovim metodom u drugoj tabeli.

| $\boldsymbol{x}^{(0)}$ | $\boldsymbol{x}^{(1)}$ | $\boldsymbol{x}^{(2)}$ | $\boldsymbol{x}^{(3)}$ | ... | $\boldsymbol{x}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ -0.9 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.98 \\ -1.04 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.015 \\ 0.993 \\ -1.004 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |

| $\boldsymbol{x}^{(0)}$ | $\boldsymbol{x}^{(1)}$ | $\boldsymbol{x}^{(2)}$ | $\boldsymbol{x}^{(3)}$ | ... | $\boldsymbol{x}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \\ -0.83 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.963 \\ 0.9863 \\ -0.962 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.0046 \\ 0.9991 \\ -0.9937 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |

Primetimo da Gauss–Seidelove iteracije nešto brže konvergiraju ka tačnom rešenju u ovom slučaju.

b) Procenimo sada teoretski broj iteracija $k$ potrebnih da bi bila ispunjena nejednakost $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$. Pri izboru $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ važi (videti [1, str. 253])

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^k}{1 - \|B\|_\infty} \|\boldsymbol{\beta}\|_\infty.$$

U našem slučaju je $\|B\|_\infty = 0.7$, $\|\boldsymbol{\beta}\|_\infty = \max\{1, 0.8, 0.9\} = 1$, pa traženi zahtev postaje

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{0.7^k}{1 - 0.7} \cdot 1 < 10^{-4},$$

odakle sleduje $0.7^k < 0.3 \cdot 10^{-4}$, tj.

$$k > \frac{-4 + \log 0.3}{\log 0.7} \approx 29.198.$$

Dakle, da bismo ostvarili željenu tačnost potrebno je (na osnovu dobijene ocene) odrediti $\boldsymbol{x}^{(30)}$ metodom proste iteracije.

**4.2.8.** Pokažimo da sistem linearnih jednačina iz zadatka 4.2.3 nije moguće rešiti Gauss–Seidelovim iterativnim metodom.

**Rešenje.** Dati linearni sistem je oblika

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta},$$

gde su

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1.25 & -1.5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu norme iterativne matrice, u zadatku 4.2.3, dobijeni su potrebni uslovi za konvergenciju metoda proste iteracije i oni nisu ispunjeni jer su sve norme ($\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$) matrice $B$ veće od jedinice. Ipak, dati sistem jednačina moguće je rešiti metodom proste iteracije jer je $\varrho(B) = 0.7071 < 1$.

Međutim, Gauss–Seidelov metod nije konvergentan jer je jedan od korena jednačine

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 1 \\ -1.25\lambda & -1.5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.25\lambda - 0.75 = 0$$

po modulu veći od jedinice ($\lambda_1 \cong 0.29473$, $\lambda_2 \cong -2.54473$).

**4.2.9.** Pokazati da se sistem linearnih jednačina oblika $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}$, gde su

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

može rešiti Gauss–Seidelovim, a ne može rešiti metodom proste iteracije.

**Rešenje.** Norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ matrice $B$ su veće od jedinice pa dovoljni uslovi na osnovu ovih normi nisu ispunjeni.

Sopstvene vrednosti matrice $B$ dobijamo rešavanjem karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 1 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.1\lambda + 3.3 = 0.$$

Imamo $\lambda_{1,2} = 1.55 \pm 0.9474\, i$, a spektralni radijus $\varrho = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.816 > 1$. Dakle, metod proste iteracije za dati sistem jednačina divergira.

U slučaju Gauss-Seidelovog metoda rešavamo jednačinu

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ \lambda & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.1\lambda + 0.3 = 0,$$

za koju dobijamo $\lambda_{1,2} = 0.05 \pm 0.5454\, i$. Dakle, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0.5477 < 1$, tj. Gauss-Seidelov metod za dati sistem jednačina je konvergentan.

**4.2.10.** Pokazati da se sistem linearnih jednačina

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gde su

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = [11 \quad 6 \quad 11]^\top,$$

može rešiti i Jacobievom i Gauss–Seidelovom (varijanta Nekrasova) iterativnim metodom. Odrediti aproksimacije $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}$ obema metodama pri izboru $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{0}$.

**Rešenje.** Matrica A je strogo dijagonalno dominantna pa je ispunjen uslov za konvergenciju oba metoda (videti [1, str. 266]).

Iterativne formule za Jacobiev metod su

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\big(11 - x_2^{(k)}\big) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\big(6 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\big) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{8}\big(11 - x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}\big) \end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

dok su u slučaju Gauss-Seidelovog metoda,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\big(11 - x_2^{(k)}\big) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\big(6 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\big) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{8}\big(11 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\big) \end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Iteracije dobijene Jacobievim i Gauss-Seidelovim metodom prikazane su u prvoj i drugoj tabeli, respektivno.

| $\boldsymbol{x}^{(0)}$ | $\boldsymbol{x}^{(1)}$ | $\boldsymbol{x}^{(2)}$ | $\boldsymbol{x}^{(3)}$ | ... | $\boldsymbol{x}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.5 \\ -1.375 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.881 \\ -0.863 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.012 \\ 1.046 \\ -1.036 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |

| $\boldsymbol{x}^{(0)}$ | $\boldsymbol{x}^{(1)}$ | $\boldsymbol{x}^{(2)}$ | $\boldsymbol{x}^{(3)}$ | ... | $\boldsymbol{x}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.225 \\ -0.93125 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.9775 \\ 1.02281 \\ -0.99711 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.9977 \\ 1.00129 \\ -0.99996 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |

Primetimo da Gauss-Seidelove iteracije (varijanta Nekrasova), u ovom slučaju, brže konvergiraju ka tačnom rešenju $\boldsymbol{x}^*$, nego one generisane pomoću Jacobievog metoda.

**4.2.11.** Dat je sistem linearnih jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pokazati da se ovaj sistem može rešavati Gauss–Seidelovim metodom (varijanta Nekrasova), iako matrica $A$ nije strogo dijagonalno dominantna.

**Rešenje.** Matrica A nije strogo dijagonalno dominantna. No pokažimo da je ispunjen potreban i dovoljan uslov za konvergenciju Gauss–Seidelovog metoda (varijanta Nekrasova). Da bismo ispitali spektralne uslove (videti [1, str. 265]) rešimo jednačinu

$$\begin{vmatrix} 4\lambda & 5 \\ 5\lambda & 10\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dobijamo sopstvene vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.625$. Dakle $|\lambda_{1,2}| < 1$ pa Gauss–Seidelov metod (varijanta Nekrasova) za dati sistem jednačina konvergira.

Konvergenciju ovog metoda možemo konstatovati i na osnovu toga što je matrica $A$ simetrična, tj. $A^\top = A$ i pozitivno definitna (videti [1, str. 266]), tj.

$$a_{11} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 15 > 0.$$

**4.2.12.** Rešiti sistem linearnih jednačina oblika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 10 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = [7 \quad -10 \quad 4 \quad 7]^\top,$$

metodom suksesivne gornje relaksacije za $\omega = 0.4h$, $h = 1, 2, 3, 4$.

**Rešenje.** Matrica $A$ za dati sistem linearnih jednačina je simetrična ($A = A^\top$) i pozitivno definitna jer su sve determinante

$$a_{11} = 4, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 39, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 257, \quad \det(A) = 990$$

pozitivne. Na osnovu teoreme 3.5.2 (videti [1, str. 273–274]) metod suksesivne gornje relaksacije za ovaj sistem linearnih jednačina će konvergirati za $\omega \in (0, 2)$, dakle, i za vrednosti $\omega$ date u zadatku.

Iterativni proces suksesivne gornje relaksacije, za dati sistem linearnih jednačina, ima vektorski oblik (videti [1, str. 272])

$$D\boldsymbol{x}^{(k)} = D\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega\left[\boldsymbol{b} - C_1\boldsymbol{x}^{(k)} - (D + C_2)\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right] \quad (k = 1, 2, \dots),$$

gde je $\omega$ relaksacioni množilac, dok je njegov skalarni oblik:

$$\begin{aligned} a_{ii}\hat{x}_i^{(k)} &= -\sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i, \\ x_i^{(k)} &= x_i^{(k-1)} + \omega\big(\hat{x}_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\big), \end{aligned}$$

gde su $i = 1, 2, 3, 4$ i $k = 1, 2, \dots$.

Odgovarajući kod na FORTRAN jeziku za generisanje prvih deset iteracija (u aritmetici sa običnom preciznošću), startujući sa nula vektorom, ima sledeći oblik:

```
      dimension a(4,4),b(4),x(4)
      open(unit=2, name='podaci',status='unknown',
     * access='sequential',form='formatted')
      read(2,*) n
      do 5 i=1,n
      do 5 j=1,n
    5 read(2,*) a(i,j)
      read(2,*) (b(i),i=1,n)
      write(1,35)
      do 50 korak=1,4
      omega=0.4*korak
      write(1,40) omega
      do 10 i=1,n
   10 x(i)=0
      do 50 iter=1,10
      do 25 i=1,n
      s=b(i)
      do 20 j=1,n
      if(i.ne.j) then
      s=s-a(i,j)*x(j)
      end if
   20 continue
      x(i)=x(i)+omega*(s/a(i,i)-x(i))
   25 continue
   50 write(1,30) iter,(x(i),i=1,n)
```

```
30 format(10x,i4,1x,5f12.6)
35 format(2x,'omega',5x,'iter',6x,'x1(k)',7x,'x2(k)',
  * 7x,'x3(k)',7x,'x4(k)')
40 format(f6.1)
   stop
   end
```

Za date vrednosti relaksacionog parametra $\omega$ dobijeni su sledeći rezultati:

| omega | iter | x1(k) | x2(k) | x3(k) | x4(k) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | | | | | |
| | 1 | 0.700000 | -0.372000 | 0.271086 | 0.439927 |
| | 2 | 0.994815 | -0.587497 | 0.483504 | 0.656466 |
| | 3 | 1.106846 | -0.720646 | 0.638546 | 0.770216 |
| | 4 | 1.138000 | -0.807143 | 0.747956 | 0.835315 |
| | 5 | 1.135022 | -0.865309 | 0.823970 | 0.876278 |
| | 6 | 1.119227 | -0.905283 | 0.876487 | 0.904387 |
| | 7 | 1.100131 | -0.933108 | 0.912784 | 0.924985 |
| | 8 | 1.081770 | -0.952617 | 0.937969 | 0.940736 |
| | 9 | 1.065653 | -0.966352 | 0.955549 | 0.953073 |
| | 10 | 1.052142 | -0.976047 | 0.967910 | 0.962850 |
| 0.8 | | | | | |
| | 1 | 1.400000 | -0.688000 | 0.614400 | 0.660224 |
| | 2 | 1.278310 | -0.880821 | 0.856808 | 0.839143 |
| | 3 | 1.143841 | -0.954615 | 0.942604 | 0.919878 |
| | 4 | 1.069894 | -0.982558 | 0.975377 | 0.960461 |
| | 5 | 1.033283 | -0.993072 | 0.988973 | 0.980786 |
| | 6 | 1.015728 | -0.997129 | 0.994942 | 0.990774 |
| | 7 | 1.007410 | -0.998762 | 0.997651 | 0.995606 |
| | 8 | 1.003487 | -0.999449 | 0.998902 | 0.997918 |
| | 9 | 1.001641 | -0.999749 | 0.999485 | 0.999016 |
| | 10 | 1.000772 | -0.999884 | 0.999758 | 0.999536 |
| 1.2 | | | | | |
| | 1 | 2.100000 | -0.948000 | 1.010743 | 0.687058 |
| | 2 | 0.983365 | -1.052527 | 0.962214 | 1.048898 |
| | 3 | 0.958230 | -0.979570 | 1.008935 | 1.017318 |
| | 4 | 1.004092 | -1.003661 | 1.002437 | 0.994278 |
| | 5 | 1.001516 | -1.000357 | 0.998654 | 1.000008 |
| | 6 | 0.999585 | -0.999654 | 1.000152 | 1.000317 |
| | 7 | 0.999996 | -1.000068 | 1.000047 | 0.999933 |
| | 8 | 1.000021 | -1.000003 | 0.999980 | 0.999998 |
| | 9 | 0.999996 | -0.999995 | 1.000002 | 1.000004 |
| | 10 | 1.000000 | -1.000001 | 1.000001 | 0.999999 |

1.6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.800000 | -1.152000 | 1.440914 | 0.540453 |
| 2 | 0.226838 | -1.247126 | 0.743384 | 1.609355 |
| 3 | 0.877563 | -0.691700 | 1.152314 | 0.860143 |
| 4 | 1.308668 | -1.206710 | 0.971141 | 0.810985 |
| 5 | 0.883328 | -0.915649 | 0.935552 | 1.194448 |
| 6 | 0.948185 | -1.007166 | 1.086390 | 0.941844 |
| 7 | 1.074747 | -1.020691 | 0.944332 | 0.962620 |
| 8 | 0.976779 | -0.979468 | 1.015471 | 1.048810 |
| 9 | 0.983097 | -1.012165 | 1.007435 | 0.980018 |
| 10 | 1.021261 | -0.994876 | 0.988629 | 0.996383 |

Tačno rešenje datog sistema jednačina je vektor

$$[1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^\top.$$

Na osnovu dobijenih iteracija, može se videti da je, u ovom primeru, najbrža konvergencija metod suksesivne gornje relaksacije kada je parametar $\omega = 1.2$.

**4.2.13.** Dat je iterativni proces

$$X_{n+1} = X_n(2I - AX_n) \qquad (n = 0, 1, \dots) \tag{1}$$

za nalaženje inverzne matrice $A^{-1}$ matrice $A$, gde je $X_0$ proizvoljna matrica.

1° Dokazati da je proces (1) analogan Newtonovom metodu za izračunavanje recipročne vrednosti datog broja.

2° Ako se uvede $C_n = I - AX_n$, dokazati da je $C_n = C_0^{2^n}$.

3° Dokazati da je potreban i dovoljan uslov za konvergenciju iterativnog procesa (1) da sopstvene vrednosti matrice $C_0$ leže u jediničnom krugu.

**Rešenje.** 1° Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x} - a$. Primenom Newtonovog metoda na određivanje nule funkcije $f$, dobijamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\dfrac{1}{x_n} - a}{-\dfrac{1}{x_n^2}},$$

tj.

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n),$$

što je analogon formuli (1).

2° Na osnovu (1) imamo

$$
\begin{aligned}
X_n &= X_{n-1}\,(2I - AX_{n-1}) \\
&= X_{n-1}\,(I + (I - AX_{n-1})) \\
&= X_{n-1}(I + C_{n-1})\,.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Kako je

$$C_n = I - AX_n = I - AX_{n-1}\,(I + C_{n-1})\ ,$$

tj.

$$C_n = I - (I - C_{n-1})\,(I + C_{n-1}) = C_{n-1}^2\,,$$

imamo redom

$$C_n = C_{n-1}^2 = C_{n-2}^{2^2} = C_{n-3}^{2^3} = \cdots = C_0^{2^n}\ , \tag{3}$$

čime je dokaz završen.

3° Na osnovu (2) i (3) važe jednakosti

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n\,(I + C_n) \\
&= X_{n-1}\,(I + C_{n-1})\,(I + C_n) \\
&\ \vdots \\
&= X_0\big(I + C_0\big)\big(I + C_1\big)\big(I + C_2\big)\cdots\big(I + C_n\big) \\
&= X_0\big(I + C_0\big)\big(I + C_0^2\big)\big(I + C_0^{2^2}\big)\cdots\big(I + C_0^{2^n}\big)\,,
\end{aligned}
$$

tj.

$$X_{n+1} = X_0\big(I + C_0 + C_0^2 + C_0^3 + \cdots + C_0^{2^{n+1}-1}\big)\,. \tag{4}$$

Iterativni proces (1), tj. (4), je ekvikonvergentan sa matričnim redom

$$I + C_0 + C_0^2 + C_0^3 + \cdots\ . \tag{5}$$

Kako red (5) konvergira ka $(I - C_0)^{-1}$ ako i samo ako su sve sopstvene vrednosti matrice $C_0$ manje po modulu od jedan (videti [1, str. 222-226]), tj.

$$\big|\lambda_i(C_0)\big| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,, \tag{6}$$

gde je $m$ red matrice $C_0$, na osnovu (4) imamo

$$\lim_{n\to+\infty} X_{n+1} = X_0(I - C_0)^{-1} = X_0(AX_0)^{-1} = X_0X_0^{-1}A^{-1} = A^{-1}\,.$$

Dakle, zaključujemo da je uslov (6) potreban i dovoljan za konvergenciju iterativnog procesa (1).

**4.2.14.** Koristeći iterativni proces (1) iz zadatka 4.2.13, naći inverznu matricu $A^{-1}$ matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $X_0$ uzeti

$$X_0 = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.9 & -1.8 \\ 0.7 & -1.4 & 1.9 \\ 0.6 & -1.2 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje.** Pomenuti iterativni proces glasi

$$X_{n+1} = X_n(2I - AX_n) \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{1}$$

S obzirom da je

$$C_0 = I - AX_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

na osnovu rezultata iz zadatka 4.2.13, mogli bismo sada ispitati konvergenciju procesa (1) nalaženjem sopstvenih vrednosti matrice $C_0$. Međutim, s obzirom da je, na primer $\|C_0\|_1 = 0.6 < 1$, što je dovoljan uslov za konvergenciju matričnog reda (5) iz zadatka 4.2.13 ka $(I - C_0)^{-1}$ (videti [1, str. 222-226]), zaključujemo da proces (1) konvergira za ovako izabrano $X_0$.

Dakle, primenimo proces (1) sa datom matricom $X_0$. Za kriterijum završetka iterativnog procesa (1) možemo uzeti, na primer, $\|I - AX_n\| < \varepsilon$, gde je $\varepsilon$ zahtevana tačnost. Dobijamo

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1.6700 & 4.1400 & -2.5100 \\ 0.8600 & -2.3200 & 2.5400 \\ 0.8400 & -1.6800 & 0.8400 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1.9440 & 4.8560 & -2.9184 \\ 0.9712 & -2.8784 & 2.9200 \\ 0.9744 & -1.9488 & 0.9744 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1.9984 & 4.9960 & -2.9977 \\ 0.9989 & -2.9962 & 2.9976 \\ 0.9993 & -1.9987 & 0.9993 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} -2.0000 & 5.0000 & -3.0000 \\ 1.0000 & -3.0000 & 3.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $\|I - AX_4\| = 0$, zaključujemo da je $A^{-1} = X_4$.

**V** G L A V A

# Nelinearne jednačine i sistemi

## 5.1. Nelinearne jednačine

**5.1.1.** Metodom proste iteracije odrediti realan koren jednačine

$$x^3 - x - 1 = 0\,. \tag{1}$$

**Rešenje.** Datu jednačinu možemo napisati u obliku $x^3 = x + 1$, pa skicirajući grafike elementarnih funkcija $x \mapsto x^3$ i $x \mapsto x + 1$ uočavamo da postoji samo jedan realan koren date jednačine i to na segmentu $[0, 2]$.

Da bismo rešili jednačinu (1) metodom proste iteracije, treba je prethodno svesti na oblik

$$x = \Phi(x)\,. \tag{2}$$

Pod pretpostavkom da neprekidna funkcija $\Phi$ zadovoljava uslove:

$1^\circ$ $\Phi : [0, 2] \mapsto [0, 2]$,

$2^\circ$ $\Phi$ ima izvod u svakoj tački $x \in [0, 2]$, takav da je $|\Phi'(x)| \le q < 1$, tada jednačina (2), tj. jednačina (1), ima jedinstveno rešenje $a \in [0, 2]$ i ono se može odrediti iterativnim procesom

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,,$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [0, 2]$ (videti [1, str. 181]).

Neki od oblika (2) za jednačinu (1) su

$$x = \Phi_1(x) = x^3 - 1\,, \qquad x = \Phi_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\,, \qquad x = \Phi_3(x) = \sqrt[3]{x + 1}\,.$$

Neposrednim proveravanjem zaključujemo da od navedenih funkcija samo $\Phi_3$ zadovoljava uslove $1^\circ$ i $2^\circ$, pri čemu je

$$|\Phi_3'(x)| = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right| \le \frac{1}{3} \qquad (x \in [0, 2]).$$

Dakle, koren jednačine (1) može se odrediti iterativnim procesom

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1} \qquad (k = 0, 1, \dots)\,. \tag{3}$$

Polazeći od $x_0 = 2$, na osnovu (3), dobijamo niz dat u tabeli, odakle zaključujemo da je $a \cong 1.32472$.

| $k$ | $x_k$ |
|---|---|
| 0 | 2. |
| 1 | 1.44225 |
| 2 | 1.34668 |
| 3 | 1.32888 |
| 4 | 1.32551 |
| 5 | 1.32487 |
| 6 | 1.32475 |
| 7 | 1.32472 |
| 8 | 1.32472 |

**5.1.2.** Funkcija $x \mapsto g(x) = x^3/(0.05 - e^{-x}/(1+x))$ ima lokalni minimum u $x = a \cong 2.5$. Odrediti $a$ na pet decimala.

**Rešenje.** S obzirom da je

$$g'(x) = \frac{0.15\, x^2(1+x)^2 - x^2 e^{-x}(x^2+5x+3)}{[0.05\,(1+x) - e^{-x}]^2}\,,$$

iz uslova $g'(x) = 0$ $(a \neq 0)$ dobijamo

$$x = \log \frac{x^2 + 5x + 3}{0.15\,(1+x)^2}\,.$$

Ako za rešavanje poslednje jednačine koristimo metod proste iteracije

$$x_{k+1} = \log \frac{x_k^2 + 5x_k + 3}{0.15\,(1+x_k)^2} \qquad (k = 0, 1, \dots)\,,$$

startujući sa $x_0 = 2.5$, dobijamo niz dat u sledećoj tabeli:

| $k$ | $x_k$ |
|---|---|
| 0 | 2.5 |
| 1 | 2.471208 |
| 2 | 2.474441 |
| 3 | 2.474076 |
| 4 | 2.474117 |
| 5 | 2.474113 |

U ovom slučaju, pre početka iterativnog procesa nismo ispitali uslove za njegovu konvergenciju, no na osnovu generisanog niza, konvergencija je evidentna.

S obzirom da je

$$|x_5 - x_4| = 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

to je, dakle, $a \cong 2.47411$.

**5.1.3.** Za funkciju $f(x) = e^x - ax(\log x - 1)$ postoji jedna vrednost $a = A$ takva da je za neko $x$, $f'(x) = f''(x) = 0$. Odrediti $A$ sa tačnošću $10^{-3}$.

**Rešenje.** S obzirom da je $f'(x) = e^x - a \log x$, $f''(x) = e^x - a/x$, iz uslova $f'(x) = f''(x)$ dobijamo jednačinu $F(x) = 0$, gde je $F(x) = x \log x - 1$.

Jednačinu $F(x) = 0$ možemo napisati u obliku $\log x = 1/x$, pa skicirajući grafike elementarnih funkcija $x \mapsto \log x$ i $x \mapsto 1/x$, uočavamo da postoji samo jedan realan koren jednačine $F(x) = 0$. S obzirom da je $F(1) < 0$, $F(2) > 0$, zaključujemo da se koren jednačine nalazi na segmentu [1,2].

Sada na rešavanje jednačine $F(x) = 0$ primenimo Newtonov iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

tj.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \log x_k - 1}{\log x_k + 1} = \frac{x_k + 1}{\log x_k + 1} \qquad (k = 0, 1, \dots). \tag{1}$$

Iz uslova $f''(x) = 0$ sleduje

$$a_k = x_k e^{x_k} \qquad (k = 0, 1, \dots). \tag{2}$$

Korišćenjem formula (1) i (2), uzimajući na primer $x_0 = 2$, dobijamo sledeće rezultate:

| $k$ | $x_k$ | $a_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 2. | 14.7781 |
| 1 | 1.77185 | 10.4215 |
| 2 | 1.76324 | 10.2819 |
| 3 | 1.76322 | 10.2817 |

Kako je $|a_3 - a_2| = 2 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$, uzimamo da je $A \cong a_3 = 10.2817$.

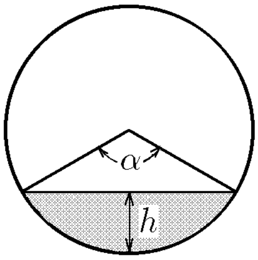
**5.1.4.** Rezervoar za naftu ima oblik ležećeg cilindra sa poluprečnikom $1\,m$. Odrediti visinu, sa tačnošću od $10^{-3}\,m$, do koje treba sipati naftu da bi se rezervoar napunio do četvrtine svoje ukupne zapremine.

**Rešenje.** Ako je dužina rezervoara $\ell$, zavisnost zapremine nafte od ugla $\alpha$ je data formulom (videti sliku 1 na kojoj je prikazan poprečni presek rezervoara)

$$V = r^2 \ell \, \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

kojoj odgovara visina nafte

$$h = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right). \tag{1}$$




Sl. 1.

Ukupna zapremina rezervoara je $V_u = \pi r^2 \ell$. Iz uslova $V = V_u/4$ sleduje

$$\alpha - \sin\alpha - \frac{\pi}{2} = 0\,. \tag{2}$$

Dakle, ako rešimo transcendentnu jednačino (2), na osnovu (1), možemo odrediti visinu $h$. Primenimo Newtonov iterativni metod za rešavanje jednačine (2),

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \sin\alpha_k - \pi/2}{1 - \cos\alpha_k} \qquad (k = 0, 1, \dots)\,. \tag{3}$$

Iz geometrije problema zaključujemo da se rešenje jednačine (2) nalazi u intervalu $(0, \pi)$, te za startnu vrednost procesa (3) uzimamo $\alpha_0 = 3$. Na osnovu (3) i (1), dobijamo sledeće rezultate:

| $k$ | $\alpha_k$ | $h_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 3. | |
| 1 | 2.352719 | 0.615712 |
| 2 | 2.310269 | 0.596204 |
| 3 | 2.309881 | 0.596027 |

S obzirom da je $|h_3 - h_2| < 10^3\, m$, možemo približno uzeti da je $h \cong 59.6\, cm$.

**5.1.5.** Primenom Newtonovog metoda odrediti kvadratni koren iz pozitivnog broja $a$. Numerički ilustrovati slučaj $a = 3$.

**Rešenje.** Primenom Newtonovog metoda na rešavanje jednačine

$$f(x) = x^2 - a = 0 \qquad (x > 0)\,,$$

dobijamo iterativnu formulu za određivanje kvadratnog korena iz pozitivnog broja $a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = 0.5\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,. \tag{1}$$

Slično, ako Newtonov metod primenimo na rešavanje jednačine

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0 \qquad (x > 0)\,,$$

dobijamo iterativnu formulu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\dfrac{1}{x_k^2} - a}{-\dfrac{2}{x_k^3}} = 0.5\,x_k\left(3 - ax_k^2\right) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,. \tag{2}$$

Niz koji se generiše na osnovu iterativnog procesa (2) konvergira ka $a^{-1/2}$. Kada se na ovaj način izračuna vrednost za $a^{-1/2}$ tada se može lako izračunati vrednost bilo kog negativnog stepena ili polustepena broja $a$ koristeći samo operacije množenja. Ako se rezultat iterativnog procesa (2) pomnoži sa $a$, dobija se kvadratni koren iz broja $a$. Na taj način može se izračunati i kvadratni koren broja $a$ bez upotrebe operacije deljenja. Isto tako, odgovarajućim množenjem sa $a$ ili približnom vrednošću $a^{1/2}$, mogu se dobiti vrednosti pozitivnih stepena ili polustepena broja $a$.

Iterativni proces (2) može ponekad imati veliku prednost nad procesom (1) kao metod za nalaženje kvadratnog korena, s obzirom da ne zahteva operacije deljenja.

Izračunajmo sada približnu vrednost $\sqrt{3}$, korišćenjem iterativnih formula (1) i (2), sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-6}$.

Na osnovu (1), startujući sa $x_0 = 3$, dobijamo niz dat u priloženoj sledećoj tabeli. Dakle, $\sqrt{3} \cong 1.7320508$.

Slično, startujući sa $x_0 = 0.1$, na osnovu formule (2), dobijamo niz prikazan u istoj tabeli. Saglasno prethodnom, imamo $\sqrt{3} \cong 3 \cdot x_9 = 1.7320509$.

| formula | (1) | (2) |
|---|---|---|
| $k$ | $x_k$ | $x_k$ |
| 0 | 3. | 0.1 |
| 1 | 2.0000000 | 0.1485000 |
| 2 | 1.7500000 | 0.2178379 |
| 3 | 1.7321429 | 0.3112511 |
| 4 | 1.7320508 | 0.4216469 |
| 5 | 1.7320508 | 0.5200259 |
| 6 | | 0.5690953 |
| 7 | | 0.5771741 |
| 8 | | 0.5773502 |
| 9 | | 0.5773503 |

**5.1.6.** Metodom polovljenja intervala naći koren jednačine

$$f(x) = e^{-x} - x = 0\,,$$

sa tačnošću $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

**Rešenje.** Metod polovljenja intervala, za rešavanje jednačine $f(x) = 0$ koja na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima izolovan prost koren $x = a$, sastoji se u konstrukciji niza intervala $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ takvog da je

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{1}{2}\,(y_k - x_k) \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

i

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \lim_{k \to +\infty} y_k = a\,.$$

Proces konstrukcije intervala se prekida, na primer, kada dužina intervala postane manja od unapred zadatog malog pozitivnog broja $\varepsilon$.

Metod polovljenja intervala se algoritamski može iskazati kroz sledeća četiri koraka:

1° $k := 0\,, \qquad x_1 := \alpha\,, \qquad y_1 := \beta\,;$

2° $k := k + 1\,, \qquad z_k := \dfrac{1}{2}\,(x_k + y_k)\,;$

3° Ako je

$$\begin{array}{lll} f(z_k)\,f(x_k) < 0 & \text{uzeti} & x_{k+1} := x_k\,, \quad y_{k+1} := z_k\,, \\ \phantom{f(z_k)\,f(x_k)} > 0 & & x_{k+1} := z_k\,, \quad y_{k+1} := y_k\,, \\ \phantom{f(z_k)\,f(x_k)} = 0 & & \text{Kraj izračunavanja} \;\; a := z_k\,; \end{array}$$

$4^\circ$ Ako je

$$
\begin{array}{lll}
|y_{k+1} - x_{k+1}| \geq \varepsilon & & \text{preći na } 2^\circ\,, \\
< \varepsilon & & z_{k+1} := \dfrac{1}{2}\,(x_{k+1} + y_{k+1}) \\
& & \text{Kraj izračunavanja } \ a := z_{k+1}\,.
\end{array}
$$

Primetimo da za grešku u aproksimaciji $z_{k+1}$ važi ocena

$$
|z_{k+1} - a| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(\beta - \alpha)\,.
$$

Primenimo sada ovaj algoritam za rešavanje jednačine $f(x) = e^{-x} - x = 0$ koja ima jedan realan koren na segmentu $[0.3, 0.7]$ ($f(0.3) > 0,\ f(0.7) < 0$).

Na osnovu algoritma imamo:

$1^\circ$ $k = 0\,,\quad x_1 = 0.3\,,\quad y_1 = 0.7\,;$

$2^\circ$ $k = 1\,,\quad z_1 = \dfrac{1}{2}(0.3 + 0.7) = \underline{0.5}\,;$

$3^\circ$ Kako je

$f(z_1)\,f(x_1) > 0$ uzimamo $x_2 = z_1 = 0.5,\ y_2 = y_1 = 0.7\,;$

$4^\circ$ S obzirom da je

$|y_2 - x_2| = 0.2 > \varepsilon$ prelazimo na $2^\circ$ ;

$2^\circ$ $k = 2\,,\quad z_2 = \dfrac{1}{2}(0.5 + 0.7) = \underline{0.6}\,;$

$3^\circ$ Kako je

$f(z_2)\,f(x_2) < 0$ uzimamo $x_3 = x_2 = 0.5,\ y_3 = z_2 = 0.6\,;$

$4^\circ$ S obzirom da je

$|y_3 - x_3| = 0.1 > \varepsilon$ prelazimo na $2^\circ$ ;

$2^\circ$ $k = 3\,,\quad z_3 = \dfrac{1}{2}(0.5 + 0.6) = \underline{0.55}\,;$

$3^\circ$ Kako je

$f(z_3)\,f(x_3) > 0$ uzimamo $x_4 = z_3 = 0.55,\ y_4 = y_3 = 0.6\,;$

$4^\circ$ Kako je

$|y_4 - x_4| = 0.05 = \varepsilon$ prelazimo na $2^\circ$ ;

$2^\circ$ $k = 4\,,\quad z_4 = \dfrac{1}{2}(0.55 + 0.6) = \underline{0.575}\,;$

$3^\circ$ S obzirom da je

$f(z_4)\,f(x_4) < 0$ uzimamo $x_5 = x_4 = 0.55,\ y_5 = z_4 = 0.575\,;$

$4^\circ$ Kako je

$|y_5 - x_5| = 0.025 < \varepsilon$ izračunavamo $z_5 = \dfrac{1}{2}(0.55 + 0.575) = 0.5625$

Kraj izračunavanja $a = \underline{0.5625}$.

**5.1.7.** Rešiti jednačinu $f(x) = x^2 - e^x + 2 = 0$, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, korišćenjem metoda sečice, a zatim korišćenjem metoda regula falsi.

**Rešenje.** Metod sečice, za rešavanje jednačine $f(x) = 0$ koja na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima izolovan prost koren $x = a$, je dat formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{1}$$

Za startovanje ovog iterativnog procesa potrebne su dve početne vrednosti $x_0$ i $x_1$.

Geometrijski posmatrano, iteracija $x_{k+1}$ kod metoda sečice je, u stvari, presek prave (sečice) koja prolazi kroz tačke $M_k\,(x_k,\, f(x_k))$ i $M_{k-1}(x_{k-1},\, f(x_{k-1}))$, sa $x$–osom, odakle i proizilazi naziv metoda.

Metod koji je veoma blizak metodu sečice je metod *regula falsi* i on se može iskazati sledećom formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_i}{f(x_k) - f(x_i)} f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \dots)\,, \tag{2}$$

gde je $i = \max\{k-1, k-2, \dots, 0\}$ pod uslovom $f(x_k)\, f(x_i) < 0$. Startne vrednosti $x_0$ i $x_1$ treba uzeti sa različitih strana korena jednačine.

Jasno je da, geometrijski posmatrano, iteracija $x_{k+1}$ po metodu regula falsi predstavlja presek prave koja prolazi kroz tačke $M_k(x_k,\, f(x_k))$ i $M_i(x_i,\, f(x_i))$, sa $x$–osom.

Ako je $\varepsilon$ zadata tačnost, metod regula falsi algoritamski možemo iskazati kroz sledeća četiri koraka:

$1^\circ$ $z_1 := \alpha\,, \quad x := \alpha\,, \quad y := \beta\,;$

$2^\circ$ $z_2 = y - \dfrac{y - x}{f(y) - f(x)} f(y)\,;$

$3^\circ$ Ako je

$$\begin{array}{lll} f(x)\,f(z_2) < 0 & \text{uzeti} & y := z_2\,, \\ \phantom{f(x)\,f(z_2)} > 0 & & x := z_2\,, \\ \phantom{f(x)\,f(z_2)} = 0 & & \text{Kraj izračunavanja } a := z_2\,; \end{array}$$

$4^\circ$ Ako je

$$\begin{array}{lll} |z_2 - z_1| \geq \varepsilon & \text{uzeti} & z_1 := z_2 \text{ i preći na } 2^\circ\,, \\ \phantom{|z_2 - z_1|} < \varepsilon & & \text{Kraj izračunavanja } a := z_2\,. \end{array}$$

Što se tiče konvergencije jednog i drugog metoda možemo reći sledeće. Metod sečice, ukoliko su $x_0$ i $x_1$ uzeti iz dovoljno bliske okoline tačke $x = a$, brže konvergira ka rešenju od metoda regula falsi. No brzina konvergencije je lokalno svojstvo metoda. Što se tiče globalnih svojstava, metod regula falsi konvergira za svako $x_0$ i $x_1$ sa segmenta $[\alpha, \beta]$ $(f(x_0)\, f(x_1) < 0)$ što nije uvek slučaj sa metodom sečice.

Rešimo sada jednačinu $f(x) = x^2 - e^x + 2 = 0$, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, koja ima prost koren na segmentu $[1, 2]$ $(f(1) > 0,\ f(2) < 0)$.

Startujući sa $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$, metodom sečice i metodom regula falsi dobijamo nizove iteracija koji su dati u drugoj i trećoj koloni priložene tabele.

| metod | sečice | regula falsi |
|---|---|---|
| $k$ | $x_k$ | $x_k$ |
| 0 | 1. | 1. |
| 1 | 2. | 2. |
| 2 | 1.16861 | 1.16861 |
| 3 | 1.24873 | 1.24873 |
| 4 | 1.32745 | 1.28644 |
| 5 | 1.31867 | 1.30400 |
| 6 | 1.31907 | 1.31213 |
| 7 | 1.31907 | 1.31588 |
| 8 | | 1.31760 |
| 9 | | 1.31840 |
| 10 | | 1.31876 |
| 11 | | 1.31893 |
| 12 | | 1.31901 |

Vidimo da se metodom sečice dobija $a \cong 1.31907$. Metod regula falsi (2) konvergira sporije. Kako je $|x_{12} - x_{11}| = 8 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$ možemo uzeti $a \cong 1.31901$.

**5.1.8.** Odrediti red konvergencije $r$ i asimptotsku konstantu greške $C_r$ Newtonovog metoda, za rešavanje nelinearnih jednačina oblika $f(x) = 0$, koje na segmentu $[\alpha, \beta]$ imaju izolovan jedinstven prost koren $x = a$, za slučaj da je $f''(a) = 0$ i $f \in C^3[\alpha, \beta]$.

**Rešenje.** Na osnovu iterativne funkcije Newtonovog metoda

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,,$$

imamo

$$\varphi(x) - a = \frac{(x-a)\, f'(x) - f(x)}{f'(x)}\,, \tag{1}$$

dok su, na osnovu Taylorove formule,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)\,(x-a) + \frac{f'''(\xi)}{2}\,(x-a)^2\,,$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}\,(x-a)^3\,,$$

gde su $\xi$ i $\eta$ između $x$ i $a$. S obzirom da je, prema uslovu zadatka, $f(a) = f''(a) = 0$, stavljajući $e = x - a$ dobijamo

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} f'(x) &= f'(a) + \dfrac{f'''(\xi)}{2}\,e^2\,, \\ f(x) &= f'(a)\,e + \dfrac{f'''(\eta)}{6}\,e^3\,. \end{cases}$$

Ako $f(x)$ i $f'(x)$ u brojiocu jednakosti (1) zamenimo razvojima iz (2), dobijamo

$$\varphi(x) - a = \left(\frac{f'''(\xi)}{2f'(x)} - \frac{f'''(\eta)}{6f'(x)}\right) e^3$$

ili, posle deobe sa $e^3 = (x-a)^3$,

$$\text{(3)}\qquad \frac{\varphi(x)-a}{(x-a)^3} = \frac{f'''(\xi)}{2f'(x)} - \frac{f'''(\eta)}{6f'(x)}\,.$$

Ako, sada, pustimo da $x \to a$, tada, s obzirom da su $\xi$ i $\eta$ između $x$ i $a$, sleduje da i $\xi \to a,\ \eta \to a$, pa na osnovu (3), dobijamo

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)-a}{(x-a)^3} = \frac{1}{3}\,\frac{f'''(a)}{f'(a)}\,,$$

odakle zaključujemo da je Newtonov metod, u slučaju kada je $f''(a) = 0$, trećeg reda sa asimptotskom konstantom greške $C_3 = \dfrac{1}{3}\left|\dfrac{f'''(a)}{f'(a)}\right|$.

Inače, poznato je da, u opštem slučaju, kod određivanje prostog kogena nelinearne jednačine, Newtonov metod ima kvadratnu konvergenciju (videti [1, str. 340]).

**5.1.9.** Za određivanje prostog korena $x = a$ $(a \neq 0)$ jednačine $f(x) = 0$, dat je iterativni proces

$$\text{(1)}\qquad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{f(x_k)}{x_k f'(x_k) + p\, f(x_k)}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,,$$

gde je $p$ dati parametar. Odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške iterativnog procesa (1).

**Rešenje.** Posmatrajmo jednačinu

$$F(x) = 0\,, \tag{2}$$

gde je

$$F(x) = x^p f(x)\,,$$

koja takođe ima prost koren za $x = a$. Primenom Newtonovog metoda na jednačinu (2) dobijamo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}\,,$$

tj.

$$x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{f(x_k)}{x_k f'(x_k) + p\, f(x_k)}\right)$$

što je ekvivalentno sa (1).

Sada, s obzirom da za Newtonov metod važi

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - a}{(x_k - a)^2} = \frac{F''(a)}{2F'(a)}$$

(videti [1, str. 340]), imamo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - a}{(x_k - a)^2} = \frac{p}{a} + \frac{f''(a)}{2f'(a)}\,,$$

pa je dakle red konvergencije procesa (1) najmanje dva i asimptotska konstanta greške $C_2 = \left|\dfrac{p}{a} + \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}\right|$.

Specijalan slučaj metoda (1), za $p = 1 - n$, poznat je kao metod Tihonova, u slučaju kada je $f$ algebarski polinom stepena $n$.

*Literatura:*

L. N. Đorđević: *An iterative solution of algebraic equations with a parameter to accelerate convergence.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 412 – No 460( 1973), 179–182.

O. N. Tihonov: *O bystrom vyčislenij najbolših kornej mnogočlena.* Zap. Leningr. gorn. in-ta 48, **3** (1968), 36–41.

**5.1.10.** Neka jednačina $f(x) = 0$ ima koren $x = a$ višestrukosti $p$ i neka se za njegovo određivanje koristi iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - q\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k) - g(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots\,), \tag{1}$$

gde je

$$g(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)}\,.$$

Pri proizvoljnom $p$ odrediti red konvergencije ovog procesa za $q = 1$. Šta je sa redom konvergencije kada je $p = 1$ i $q = 1/2$?

**Rešenje.** Umesto jednačine $f(x) = 0$, posmatrajmo jednačinu $F(x) = 0$, gde je

$$F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\,,$$

koja sada ima prost koren za $x = a$. Za određivanje ovog korena primenimo Newtonov metod

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}\,,$$

tj.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - g(x_k)}\,, \tag{2}$$

gde je

$$g(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)}\,.$$

Proces (1), za $q = 1$, poklapa se sa (2) što znači da ima red konvergencije najmanje dva, za neko $p = 1, 2, \dots$ .

Razmotrimo sada slučaj kada je $p = 1$ i $q = 1/2$. U tom slučaju iterativna funkcija procesa (1) glasi

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)}{f'(x) - g(x)}\,.$$

S obzirom da je $\varphi(a) = a$ i $\varphi'(a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$, zaključujemo da je proces sa linearnom konvergencijom.

**5.1.11.** Za određivanje prostog korena $x = a$, izolovanog na segmentu $[\alpha, \beta]$, jednačine $f(x) = 0$, dat je iterativni proces

$$x_{k+1} = \psi(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots\,),$$

gde je:

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} \,. \tag{1}$$

Odrediti red konvergencije $r$ i asimptotsku konstantu greške $C_r$ datog iterativnog procesa ako $f \in C^2[\alpha, \beta]$.

**Rešenje.** Iterativnu funkciju (1) možemo predstaviti u obliku

$$\psi(x) = \Phi(x) - \frac{f\left(\Phi(x)\right)}{f'(x)} \,, \tag{2}$$

gde je

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterativna funkcija Newtonovog metoda za koju važi

$$\lim_{x \to a} \frac{\Phi(x) - a}{(x-a)^2} = C \,, \tag{3}$$

gde je $C = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}$ (videti [1, str. 340]).

Neka je $U(a)$ ($\subset [\alpha, \beta]$) okolina tačke $x = a$ u kojoj je $f'(x) \neq 0$.

Na osnovu Taylorove formule imamo

$$\begin{cases} f'(x) &= f'(a) + f''(\xi_1)(x-a)\,, \\ f(\Phi(x)) &= f'(a)(\Phi(x) - a) + \dfrac{1}{2} f''(\xi_2)\left(\Phi(x) - a\right)^2 \,, \end{cases} \tag{4}$$

gde je $\xi_1$ između $x$ i $a$, a $\xi_2$ između $\Phi(x)$ i $a$.

S druge strane, na osnovu (2) imamo

$$\psi(x) - a = \frac{(\Phi(x) - a)\; f'(x) - f\left(\Phi(x)\right)}{f'(x)} \,.$$

Korišćenjem razvoja (4), dobijamo

$$\psi(x) - a = \left[\frac{f''(\xi_1)}{f'(x)}\,(x-a) - \frac{f''(\xi_2)}{2f'(x)}\,(\Phi(x) - a)\right](\Phi(x) - a)\,,$$

za $x \in U(a)$. Kako $\xi_1 \to a$ i $\xi_2 \to a$, kada $x \to a$, na osnovu (3) i poslednje jednakosti dobijamo

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x) - a}{(x-a)^3} = C \, \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{1}{2} \left( \frac{f''(a)}{f'(a)} \right)^2 ,$$

s obzirom da je

$$\lim_{x \to a} \frac{\Phi(x) - a}{x - a} = 0 ,$$

odakle zaključujemo da je dati iterativni proces sa redom konvergencije $r = 3$ i asimptotskom konstantom greške

$$C_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{f''(a)}{f'(a)} \right)^2 .$$

Iterativna funkcija (1) sa redom konvergencije $r = 3$ je formirana na osnovu Newtonove iterativne funkcije koja ima red konvergencije $r = 2$. Dakle, iterativna funkcija (1) ubrzava konvergenciju Newtonove iterativne funkcije. Može se dati i generalnije tvrđenje: *Neka* $f \in C^2[\alpha, \beta]$, $f'(a) \neq 0$ *i neka iterativni proces* $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *ima red konvergencije* $r$ *i asimptotsku konstantu greške* $|C_r|$. *Tada iterativni proces*

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = \Phi(x_k) - \frac{f\,(\Phi(x_k))}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots\,) ,$$

*za rešavanje jednačine* $f(x) = 0$, *ima red konvergencije najmanje* $r + 1$ *i asimptotsku konstantu greške* $|C_{r+1}|$, *gde je*

$$C_{r+1} = C_r \, \frac{f''(a)}{f'(a)} \left( 1 - \frac{1}{2} \, C_r \, \delta_{1r} \right)$$

*i* $\delta_{ij}$ *Kroneckerova delta.*

Dokaz ove teoreme se može izvesti slično kao što je to učinjeno pri rešavanju ovog zadatka.

*Literatura:*

P. Pielorz: *O pewnych dwupunktowych metodach podwyzszani wykladnika zbieznosci metod iteracyjnych.* Zeszyty naukowe politechniki Šlaskiej. Ser. Mat. Fiz. **26** (1975), 53–63.

J. F. Traub: *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice–Hall, Inc. 1964.

G. V. Milovanović, M. A. Kovačević: *The modification of one method for accelerating the convergence of the iterative processes.* Univ. Nišu Zb. Rad. Gradj. Fak. Niš **3** (1982), 231–236.

**5.1.12.** Za rešavanje nelinearne jednačine $f(x) = 0$ koja na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima izolovan jedinstven prost koren $x = a$, koristi se iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \log\left(1 - g(x_k)\right) \qquad (k = 0, 1, \dots), \tag{1}$$

gde je

$$g(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}\,.$$

Ako $f \in C^3[\alpha, \beta]$, odrediti red konvergencije $r$ i asimptotsku konstantu greške $C_r$ datog iterativnog procesa.

Korišćenjem datog metoda rešiti jednačinu $f(x) = x^x - 10^5 = 0$ koja ima jedinstven prost koren u intervalu (6,7).

**Rešenje.** Sa $U(a)$ $(\subset [\alpha, \beta])$ označimo okolinu tačke $x = a$ za koju je

$$|g(x)| = \left| \frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2} \right| \le q < 1\,. \tag{2}$$

Iterativna funkcija procesa (1) je

$$\Phi(x) = x + \frac{f'}{f''} \log(1 - g)\,,$$

gde smo stavili

$$g = -h\,\frac{f''}{f'} \quad \text{i} \quad h = -\frac{f}{f'}\,.$$

S obzirom da za $x \in U(a)$ važi nejednakost (2), to je

$$\begin{aligned} \Phi(x) - x &= \frac{h}{g}\left(g + \frac{1}{2}\, g^2 + \frac{1}{3}\, g^3 + \frac{1}{4}\, g^4 + \cdots\right) \\ &= h - \frac{f''}{2f'}\, h^2 + \frac{{f''}^2}{3{f'}^2}\, h^3 + O(h^4)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

S druge strane, na osnovu Schröederovog razvoja (videti [1, str. 354]) imamo

$$a - x = h - \frac{f''}{2f'}\, h^2 + \frac{3{f''}^2 - f'\, f''}{6{f'}^2}\, h^3 + O(h^4)\,.$$

Ako sada od (3) oduzmemo (2) i imajući u vidu $h \sim a - x$ $(x \to a)$, dobijamo

$$\Phi(x) - a \sim \frac{f''(a)^2 - f'(a)\, f'''(a)}{6 f'(a)^2}\, (x - a)^3\,,$$

odakle zaključujemo da iterativni proces (1) ima red konvergencije $r = 3$ i asimptotsku konstantu greške

$$C_3 = \left| \frac{f''(a)^2 - f'(a)\, f'''(a)}{6f'(a)^2} \right| .$$

Startujući sa $x_0 = 7$, pri rešavanju jednačine $f(x) = x^x - 10^5 = 0$, korišćenjem metoda (1), dobijamo rezultate koji su sređeni u sledećoj tabeli.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 7. | 0.723 (6) |
| 1 | 6.253520253877270 | −0.481 (4) |
| 2 | 6.270919683535018 | 0.363 (−1) |
| 3 | 6.270919555562045 | −0.546 (−10) |

U poslednjoj koloni tabele broj u zagradi ukazuje na decimalni eksponent. Sve decimale u $x_3$ su tačne.

Primetimo, ovde, da na osnovu formule (1) možemo dobiti čitav niz iterativnih metoda.

Tako, na primer, razvojem logaritamske funkcije u red, uz zanemarivanje viših članova, na osnovu (1) možemo dobiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{(Newtonov metod)}\,, \tag{4}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{1}{2}\, g(x_k)\right) \qquad \text{(Čebiševljev metod)}\,,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[1 + \frac{1}{2}\, g(x_k) \left(1 + \frac{2}{3}\, g(x_k)\right)\right] . \tag{5}$$

Racionalnom aproksimacijom $\log(1 - g) \cong -g/(1 - g)$, na osnovu (1), dobija se poznati metod (videti [1, str. 346])

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\, f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f''(x_k)\, f(x_k)}\,, \quad k = 0, 1, \dots\ .$$

Slično, aproksimacijom $\log(1 - g) \cong -2g/(2 - g)$, dobijamo Halleyev metod

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)\, f'(x_k)}{2f'(x_k)^2 - f''(x_k)\, f(x_k)}\,, \quad k = 0, 1, \dots\ .$$

Takođe, može se koristiti i bolja aproksimacija

$$\log(1-g) \cong \frac{8}{3}\,\frac{(1-g)^3-1}{(2-g)^3}\,,$$

koja dovodi do iterativne formule

$$x_{k+1} = x_k - \frac{8}{3}\,\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\,\frac{\bigl(1-g(x_k)\bigr)^3-1}{\bigl(2-g(x_k)\bigr)^3}\,, \qquad k=0,1,\dots\,, \tag{6}$$

gde je $g(x) = f(x)\,f''(x)/f'(x)^2$.

Upoređenja radi, navedimo sada i rezultate koji se dobijaju korišćenjem Newtonovog metoda (4), formule (5) i formule (6) pri rešavanju iste jednačine $f(x) = x^x - 10^5 = 0$, koja ima izolovan prost koren na intervalu (6,7):

| $k$ | Newtonov metod | formula (5) | formula (6) |
|---|---|---|---|
| 0 | 7. | 7. | 7. |
| 1 | 6.701765027561503 | 6.489315673015889 | 6.344268687499011 |
| 2 | 6.457293119641319 | 6.277565105244981 | 6.270911269541724 |
| 3 | 6.313446756917490 | 6.270919559864347 | 6.270919555562045 |
| 4 | 6.273434361546812 | 6.270919555562045 | |
| 5 | 6.270928679558382 | | |
| 6 | 6.270919555682426 | | |
| 7 | 6.270919555562045 | | |

*Literatura:*

G. V. Milovanović, Đ. R. Đorđević: *Rešavanje nelinearnih jednačina iterativnim procesima dobijenim eksponencijalnom aproksimacijom.* Proc. 4th Bos.-Herc. Symp. on Informatics – Jahorina 80 (Jahorina, 1980), Vol. 2, 465/1–5, ETF Sarajevo, Sarajevo 1980.

**5.1.13.** Pokazati da funkcija

$$\phi(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2f'^2(x) - f(x)f''(x)}$$

određuje iterativni proces

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0,1,2,\ \dots\ ,$$

reda ne manjeg od tri za nalaženje prostog korena jednačine $f(x) = 0$.

**Rešenje.** Ako pođemo od Newtonovog metoda čiji je red konvergencije jednak dva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

sa iterativnom funkcijom

$$\phi_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

i na njega primenimo postupak za ubrzavanje konvergencije (videti teoremu 2.4.1 [1, str. 197]), dobićemo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - \phi_1(x_k)}{1 - \dfrac{1}{r}\phi_1'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - x_k + \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}{1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{f'^2(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}{f'^2(x_k)}\right)} \\ &= x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2f'^2(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}. \end{aligned}$$

Dakle, dobijen je iterativni proces reda ne manjeg od tri. U literaturi je poznat kao Salehov metod tangentnih hiperbola ili kao Halleyev metod.

**5.1.14.** Za nalaženje prostog korena $x = a$ jednačine $f(x) = 0$ koristi se iterativni proces

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, \ \ldots \ ,$$

gde je

$$F(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'^2(x) - 2f(x)f''(x)}}.$$

Odrediti red i faktor konvergencije ovog iterativnog procesa.

**Rešenje.** Transformišimo najpre iterativnu funkciju

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'^2(x) - 2f(x)f''(x)}} \\ &= x - \frac{2f(x)}{f'(x) + f'(x)\sqrt{1 - \dfrac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}} = x - \frac{2f(x)}{f'(x)}\,\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}}. \end{aligned}$$

Odredimo, dalje, redom razvoje po stepenima od $e = x - a$ za funkcije

$$\frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}, \quad \sqrt{1 - \frac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}}.$$

Pri tome svuda ćemo umesto $f'(a), f''(a), f'''(a)$ pisati kraće $f', f'', f'''$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{f(a)+f'(a)e+\frac{1}{2}f''(a)e^2+\frac{1}{6}f'''(a)e^3+O(e^4)}{f'(a)+f''(a)e+\frac{1}{2}f'''(a)e^2+O(e^3)} \\
&= \frac{e+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e^2+\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}\,e^3+O(e^4)}{1+\frac{f''}{f'}\,e+\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}\,e^2+O(e^3)} \\
&= \left(e+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e^2+\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}\,e^3+O(e^4)\right) \\
&\qquad \times \left(1-\frac{f''}{f'}\,e-\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}\,e^2+\frac{f''^2}{f'^2}\,e^2+O(e^3)\right) \\
&= e-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e^2+\left(\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}\right)e^3+O(e^4),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} &= 1-\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1-\left[1-\frac{f''}{f'}\,e+3\left(\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}\right)e^2+O(e^3)\right] \\
&= \frac{f''}{f'}\,e+\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-\frac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right)^k \\
&= 1-\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}-\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right)^2+\cdots \\
&= 1-\frac{f''}{f'}\,e-\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}} &= \frac{1}{2-\frac{f''}{f'}\,e-\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left[\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e+\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right]} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e+\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right].
\end{aligned}
$$

Tako dobijamo

$$
\begin{aligned}
F(x)-a &= e-\frac{2f(x)}{f'(x)}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{2f(x)f''(x)}{f'^2(x)}}} \\
&= e-\left[e-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e^2+\left(\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}\right)e^3+O(e^4)\right] \\
&\qquad\times\left[1+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,e+\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right] \\
&= e-\left[e+\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}\,e^3+O(e^4)\right]=-\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}\,e^3+O(e^4).
\end{aligned}
$$

Dakle, ovim smo dobili da je red konvergencije datog iterativnog procesa $r=3$, a asimptotska konstanta greške (faktor konvergencije)

$$
C_3=\frac{1}{6}\left|\frac{f'''(a)}{f'(a)}\right|.
$$

**5.1.15.** Odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške iterativnog procesa

$$
x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)/f'(x_k)}{[1-f(x_k)f''(x_k)/f'^2(x_k)]^{1/2}}\,,
$$

koji se koristi za nalaženje prostog korena $a$ jednačine $f(x)=0$.

**Rešenje.** Neka je $e=x-a$. Jedan od načina za rešavanje ovog zadatka je korišćenje razvoja[13)]:

$$
\begin{aligned}
\frac{f}{f'} &= \frac{f(a)+f'(a)e+\dfrac{1}{2}f''(a)e^2+\dfrac{1}{6}f'''(a)e^3+O(e^4)}{f'(a)+f''(a)e+\dfrac{1}{2}f'''(a)e^2+O(e^3)} \\
&= \frac{e+\dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'}e^2+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'''}{f'}e^3+O(e^4)}{1+\dfrac{f''}{f'}e+\dfrac{1}{2}\dfrac{f'''}{f'}e^2+O(e^3)} \\
&= \left(e+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2+\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}e^3+O(e^4)\right)\cdot\left(1-\frac{f''}{f'}e-\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}e^2+\frac{f''^2}{f'^2}+O(e^3)\right) \\
&= e-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2+\left(-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}+\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^3+O(e^4),
\end{aligned}
$$

13) Drugi način je korišćenje izvoda (videti teoremu 2.1.2 i definiciju 2.1.2 [1, str. 188]).

$$
\begin{aligned}
\frac{ff''}{f'^2} &= 1-\left(\frac{f}{f'}\right)' = 1-\left[1-e\,\frac{f''}{f'}+3\left(-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}+\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right] \\
&= \frac{f''}{f'}e+\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3).
\end{aligned}
$$

Ako sa $\phi$ označimo iterativnu funkciju, imamo

$$
\begin{aligned}
\phi(x)-a &= x-a-\frac{f}{f'}\left(1-\frac{ff''}{f'^2}\right)^{-1/2} = e-\frac{f}{f'}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-\frac{ff''}{f'^2}\right)^k \\
&= e-\frac{f}{f'}\left[1+\frac{1}{2}\frac{ff''}{f'^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)^2+\cdots\right] \\
&= e-\left[e-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2+\left(-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}+\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^3+O(e^4)\right] \\
&\qquad\times\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}e+\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{f''}{f'}e+\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right)^2+\cdots\right] \\
&= e-\left[e-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2+\left(-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'}+\frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^3+O(e^4)\right] \\
&\qquad\times\left[1+\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e+\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{4}\frac{f''^2}{f'^2}\right)e^2+O(e^3)\right] \\
&= \frac{-4f'f'''+3f''^2}{24f'^2}\,e^3+O(e^4).
\end{aligned}
$$

Dakle, red konvergencije datog procesa je $r=3$, a faktor konvergencije (asimptotska konstanta greške) je

$$
C_3=\left|\frac{-4f'(a)f'''(a)+3f''^2(a)}{24f'^2(a)}\right|.
$$

**5.1.16.** Za rešavanje jednačine $f(x)=0$, koja na segmentu $[c,d]$ ima izolovan prost koren $x=a$, koristi se iterativni proces

$$
x_{k+1}=x_k-\frac{1}{4}\left[u(x_k)+\frac{3f(x_k)}{f'\left(x_k-\dfrac{2}{3}u(x_k)\right)}\right],\qquad k=0,1,\dots\ ,
$$

gde je $u(x) = f(x)/f'(x)$.

Odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške $C_r$ datog iterativnog procesa, ako je funkcija $f$ dovoljan broj puta neprekidno diferencijabilna na segmentu $[c, d]$.

**Rešenje.** Neka je $e = x - a$. S obzirom na jednakosti

$$\begin{aligned}
u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{f(a) + f'(a)e + \frac{1}{2}f''(a)e^2 + \frac{1}{6}f'''(a)e^3 + O(e^4)}{f'(a) + f''(a)e + \frac{1}{2}f'''(a)e^2 + O(e^3)} \\
&= \frac{e + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2 + \frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}e^3 + O(e^4)}{1 + \frac{f''}{f'}e + \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}e^2 + O(e^3)} \\
&= \Big(e + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2 + \frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}e^3 + O(e^4)\Big)\Big(1 - \frac{f''}{f'}e - \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}e^2 + \frac{f''^2}{f'^2}e^2 + O(e^3)\Big) \\
&= e - \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2 + \Big(-\frac{1}{3}\frac{f'''}{f'} + \frac{1}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\Big)e^3 + O(e^4) \\
&= e + \alpha e^2 + \beta e^3 + O(e^4),
\end{aligned}$$

$$v = e - \frac{2}{3}\,u = e - \frac{2}{3}e - \frac{2}{3}\alpha e^2 - \frac{2}{3}\beta e^3 + O(e^4),$$

$$\begin{aligned}
f'\Big(x - \frac{2}{3}u\Big) &= f'(a) + f''(a)v + \frac{1}{2}f'''(a)v^2 + O(v^3) \\
&= f'(a) + \frac{1}{3}f''(a)e + \Big(-\frac{2}{3}\alpha f''(a) + \frac{1}{18}f'''(a)\Big)e^2 + O(e^3) \\
&= f'(a) + pe + qe^2 + O(e^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f'\Big(x - \frac{2}{3}u\Big)} &= \frac{f(a) + f'(a)e + \frac{1}{2}f''(a)e^2 + \frac{1}{6}f'''(a)e^3 + O(e^4)}{f'(a) + pe + qe^2 + O(e^3)} \\
&= \frac{e + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2 + \frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}e^3 + O(e^4)}{1 + \frac{p}{f'}e + \frac{q}{f'}e^2 + O(e^3)} \\
&= \Big[e + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}e^2 + \frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}e^3 + O(e^4)\Big]\Big[1 - \frac{p}{f'}e - \frac{q}{f'}e^2 + \frac{p^2}{f'^2}e^2 + O(e^3)\Big] \\
&= e + \Big(\frac{1}{2}\frac{f''}{f'} - \frac{p}{f'}\Big)e^2 + \Big(\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'} - \frac{1}{2}\frac{pf''}{f'^2} - \frac{q}{f'} + \frac{p^2}{f'^2}\Big)e^3 + O(e^4) \\
&= e + Ae^2 + Be^3 + O(e^4),
\end{aligned}$$

za iterativnu funkciju

$$\phi(x) = x - \frac{1}{4}\left[u(x) + \frac{3f(x)}{f'\Bigl(x - \frac{2}{3}u(x)\Bigr)}\right]$$

važi

$$\begin{aligned}\phi(x) - a &= e - \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}\cdot\frac{f}{f'\Bigl(x - \frac{2}{3}u\Bigr)}\\ &= e - \frac{1}{4}(e + \alpha e^2 + \beta e^3 + O(e^4)) - \frac{3}{4}(e + Ae^2 + Be^3 + O(e^4))\\ &= -\frac{1}{4}(\alpha + 3A)e^2 - \frac{1}{4}(\beta + 3B)e^3 + O(e^4).\end{aligned}$$

Kako je $\alpha + 3A = 0,\ \beta + 3B = -\frac{2}{3}(f''^2/f'^2)$, to je

$$\phi(x) - a = \frac{1}{6}\frac{f''^2(a)}{f'^2(a)}e^3 + O(e^4).$$

Dakle, $r = 3$ i $C_3 = |f''^2(a)/(6f'^2(a))|$.

**5.1.17.** Za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, koja na segmentu $[c, d]$ ima višestruki koren $x = a$, koristi se iterativni proces

$$\text{(1)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u(x_k)u''(x_k)}{u'^2(x_k)}\right), \qquad k = 0, 1, \dots ,$$

gde je $u(x) = f(x)/f'(x)$.

Odrediti red konvergencije $r$ datog iterativnog procesa (1), ako je funkcija $f(x)$ dovoljan broj puta neprekidno diferencijabilna na segmentu $[c, d]$.

**Rešenje.** S obzirom da višestrukost korena $a$ jednačine $f(x) = 0$ nije poznata, to ćemo rešavati ekvivalentnu jednačinu $u(x) = f(x)/f'(x)$, koja ima prost koren $x = a$.

Na rešavanje jednačine $u(x) = 0$ primenimo Newtonov metod

$$\text{(2)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)},$$

čiji je red konvergencije dva. Ako na ovaj metod primenimo teoremu 2.4.4 za ubrzavanje konvergencije (videti [1, str. 200]), dobijamo iterativni proces

$$x_{k+1} = \phi(x_k) - \frac{1}{2}\phi'(x)(x_k - \phi(x_k)), \tag{3}$$

čiji je red konvergencije najmanje tri. Ovde je $\phi(x) = x - u(x)/u'(x)$ iterativna funkcija metoda (2).

Označimo sa $F$ iterativnu funkciju metoda (3). Tada je

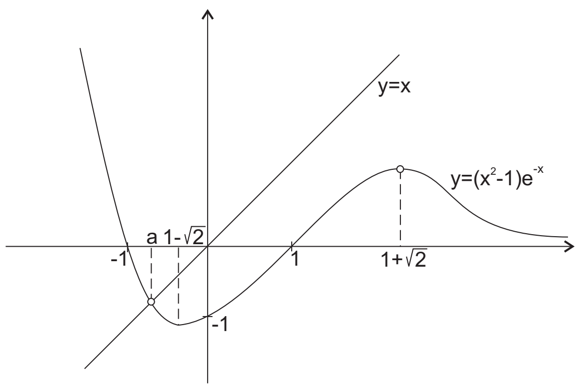
$$F(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}\phi'(x)(x_k - \phi(x)) = x - \frac{u(x)}{u'(x)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u(x)u''(x)}{u'^2(x)}\right),$$

što je istovremeno iterativna funkcija procesa (1). Zato je red konvergencije procesa (1) najmanje $r = 3$.

**5.1.18.** Sa tačnošću na četiri decimale rešiti jednačinu

$$x = (x^2 - 1)e^{-x}. \tag{1}$$

**Rešenje.** Skiciranjem grafika funkcije $y = (x^2 - 1)e^{-x}$ može se locirati rešenje jednačine (1) (videti sliku 1).



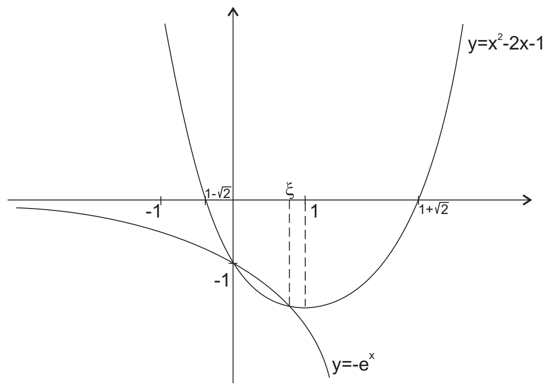

Sl. 1.

Ako jednačinu (1) predstavimo u obliku

$$f(x) \equiv x - (x^2 - 1)e^{-x} = 0,$$

imamo da je $f'(x) \equiv 1 + (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

Kako za koren $x = a$ jednačine (1) važi $a \in [-1, 0)$ i kako je $f'(x) \neq 0$ za svako $x \in [-1, 0)$, to se na rešavanje jednačine može primeniti Newtonov metod. ($f'(x) = 0$ kada je $x^2 - 2x - 1 = -e^x$, tj. kada je $x = 0$ i $x = \xi \in (0, 1 + \sqrt{2})$, što se vidi sa slike 2.)




Sl. 2

Iterativna funkcija Newtonovog metoda je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - (x^2 - 1)e^{-x}}{1 + (x^2 - 2x - 1)e^{-x}}\,.$$

Neka je startna vrednost, na primer, $x_0 = -1 \in [-1, 0)$.

Dobijene iteracije su redom:

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi(x_0) = -0.84464, \quad x_2 = \varphi(x_1) = -0.80296,\\ &x_3 = \varphi(x_2) = -0.80033, \quad x_4 = \varphi(x_3) = -0.80032, \ \ldots\ . \end{aligned}$$

Kako je $|x_4 - x_3| = 10^{-5}$, to je postignuta tražena tačnost i zato možemo uzeti da je $a \cong -0.8003$.

**Primedba.** Iterativni proces $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, sa iterativnom funkcijom $\phi(x) \equiv (x^2 - 1)e^{-x}$, startujući čak sa $x_0 = -0.8$, daje sledeći niz

$$\begin{aligned} &x_1 = -0.801, \quad x_2 = -0.798, \quad x_3 = -0.807, \quad x_4 = -0.782,\\ &x_5 = -0.849, \quad x_6 = -0.652, \quad x_7 = -1.103, \ \ldots\ , \end{aligned}$$

koji očigledno divergira.

**5.1.19.** Za rešavanje nelinearne jednačine $f(x) = 0$ koja na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima izolovan jedinstven prost koren $x = a$, koristi se iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f(x_k)^2}{2f'(x_k)^3} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{1}$$

Ako $f \in C^3[\alpha, \beta]$ odrediti red konvergencije $r$ i asimptotsku konstantu greške datog iterativnog procesa.

**Rešenje.** Primetimo da je iterativni proces (1) proizašao iz Čebiševljevog iterativnog procesa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f(x_k)^2\, f''(x_k)}{2f'(x_k)^3}\,,$$

koji ima red konvergencije $r = 3$, na osnovu aproksimacije drugog izvoda

$$f''(x_k) \cong \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\,.$$

Predstavimo iterativni proces (1) sa

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) - \frac{1}{2f'(x_k)} \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)^2 \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\,, \tag{2}$$

gde je

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newtonova iterativna funkcija, za koju je poznato da važi

$$\varphi(x_k) - a = \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_k - a)^2 + O\left[(x_k - a)^3\right]\,. \tag{3}$$

Ako stavimo $e_k = x_k - a$, na osnovu (2) imamo

$$e_{k+1} = \varphi(x_k) - a - \frac{1}{2f'(x_k)} \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)^2 \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{e_k - e_{k-1}}\,, \tag{4}$$

a na osnovu (3) je

$$e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f''(a)}{2f'(a)}\, e_k^2 + O(e_k^3)\,. \tag{5}$$

Korišćenjem Taylorove formule imamo

$$f'(x_{k-1}) = f'(a) + f''(a)\, e_{k-1} + \frac{1}{2} f'''(a)\, e_{k-1}^2 + O(e_{k-1}^3)\,,$$

$$f'(x_k) = f'(a) + f''(a)\, e_k + \frac{1}{2}\, f'''(a)\, e_k^2 + O(e_k^3)\,,$$

pa, dalje, sleduje

$$\frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{e_k - e_{k-1}} = f''(a) + \frac{1}{2}\, f'''(a)\,(e_k + e_{k-1}) + O(e_{k-1}^2)\,. \tag{6}$$

Na osnovu formule (5) imamo

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - \frac{f''(a)}{2f'(a)}\, e_k^2 + O(e_k^3)$$

pa je

$$\frac{1}{2f'(x_k)} \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)^2 = \frac{1}{2f'(a)}\, e_k^2 + O(e_k^3)\,. \tag{7}$$

Na osnovu (4), a korišćenjem relacuje (3), (7) i (6) dobijamo

$$e_{k+1} = -\frac{1}{4}\, \frac{f'''(a)}{f'(a)}\, e_k^2\, e_{k-1} + O(e_k^3)\,,$$

ili, u dovoljno bliskoj okolini tačke $x = a$, možemo pisati

$$|e_{k+1}| \sim \left|\frac{1}{4}\, \frac{f''(a)}{f'(a)}\right| |e_k|^2\, |e_{k-1}|\,. \tag{8}$$

Ako iterativni proces (1) ima red konvergencije $r$, tada je

$$|e_{k+1}| \sim A\, |e_k|^r \qquad (A > 0)\,. \tag{9}$$

Na osnovu (8) i (9) sleduje

$$A\, |e_k|^r \sim \left|\frac{1}{4}\, \frac{f'''(a)}{f'(a)}\right| |e_k|^2\, |e_{k-1}|,$$

odakle, rešavanjem po $|e_k|$ dobijamo

$$|e_k| \sim \left|\frac{1}{4A}\, \frac{f'''(a)}{f'(a)}\right|^{1/(r-2)} |e_{k-1}|^{1/(r-2)}\,. \tag{10}$$

Poređenjem (9) i (10) zaključujemo da mora biti

$$r = \frac{1}{r-2}\,, \qquad A = \left|\frac{f'''(a)}{4f'(a)}\right|^{1/(r-1)}\,.$$

Najzad, iz kvadratne jednačine $r^2 - 2r - 1 = 0$ određujemo red konvergencije $r = 1 + \sqrt{2}$. Asimptotska konstanta greške $A$ je data sa

$$A = \left| \frac{f'''(a)}{4f'(a)} \right|^{\sqrt{2}/2} .$$

*Literatura:*

G. V. Milovanović, M. S. Petković: *On some modifications of third order method for solving equations.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 678 – No 715 (1980), 63–67.

**5.1.20.** Uporediti metod sečice i Newtonov metod, sa stanovišta njihove primene.

**Rešenje.** U primeni iterativnih metoda pojavljuje se problem „optimalnog“ izbora iterativne funkcije za rešavanje konkretne jednačine $f(x) = 0$. Svakako, ovde pojam „optimalan“ treba shvatiti u osnovnom numeričkom smislu, tj. optimalan je onaj metod koji najbrže dovodi do rešenja sa zahtevanom tačnišću.

Neka je $(x_k)$ niz generisan iterativnim procesom koji ima red konvergencije $r$. Ako grešku u $k$–toj iteraciji označimo sa $e_k = x_k - a$, tada je

$$e_{k+1} = N_k\, e_k^r \qquad (N_k \to C)\,, \tag{1}$$

gde je $|C|$ asimptotska konstanta greške.

Na osnovu (1) bi se mogao nametnuti pogrešan zaključak da ukoliko iterativni proces ima veći red konvergencije $r$, utoliko bi bio povoljniji za primenu, tj. brže bi dovodio do rešenja sa zahtevanom tačnošću. Međutim, pri ovome se gubi iz vida iterativna funkcija na osnovu koje se generiše niz $(x_k)$, koja upravo pokazuje tendenciju komplikovanosti, tj. zahteva sve veći broj izračunavanja, sa porastom reda $r$. Dakle, zaključujemo da mera efikasnosti iterativnih procesa mora uzeti u obzir kako red konvergencije, tako i broj operacija u jednoj iteraciji.

Za naše dalje razmatranje, aproksimirajmo (1) sa

$$e_{k+1} = C\, e_k^r\,.$$

Pretpostavimo da je $C > 0$, čime se ništa ne gubi od opštosti razmatranja, i neka je $r > 1$. Uporedimo efikasnost dva iterativna metoda (a) i (b). Odgovarajuće greške ovih metoda su

$$e_{k+1} = C_a (e_k)^{r_a}\,, \qquad \eta_{k+1} = C_b (\eta_k)^{r_b}\,,$$

respektivno. Ako stavimo da je $S_k = -\log|e_k|$ i $T_k = -\log|\eta_k|$, tada su

$$S_{k+1} = -\log C_a + r_a\, S_k \qquad \text{i} \qquad T_{k+1} = -\log C_b + r_b\, T_k\,.$$

Rešenja ovih nehomogenih linearnih diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima su data sa

$$S_k = S_0\, r_a^k - \log C_a^{(r_a^k-1)/(r_a-1)}\,, \qquad T_k = T_0\, r_b^k - \log C_b^{(r_b^k-1)/(r_b-1)}\,.$$

Ako oba iterativna procesa startuju sa istom početnom vrednošću tada je $S_0 = T_0$. Pretpostavimo da metod (a) postiže zadatu tačnost posle $I$, a metod (b) posle $J$ iteracija. Tada je $S_I = T_J$, odakle sleduje

$$S_0\left(r_a^I - r_b^J\right) + \log \frac{C_b^{(r_b^J-1)/(r_b-1)}}{C_a^{(r_a^I-1)/(r_a-1)}} = 0\,. \tag{2}$$

Ako su „cene iteracija“ metoda (a) i (b), označene sa $\theta_a$ i $\theta_b$ respektivno, tada su ukupne „cene“ posle $I$ odnosno $J$ iteracija, date sa

$$L_a = I\,\theta_a\,, \qquad L_b = J\,\theta_b\,,$$

odakle je

$$L_a = \frac{I}{J}\cdot\frac{\theta_a}{\theta_b}\cdot L_b\,. \tag{3}$$

Iz jednačine (2) nije moguće generalno dobiti odnos $\dfrac{I}{J}$.

Međutim, ako za metod (a) uzmemo metod sečice a za (b) Newtonov metod, to je ipak moguće. S obzirom da je tada $r_a = (1+\sqrt{5})/2$, $r_b = 2$, $C_a = C_b^{r_a-1}$, (videti [1]), (2) se svodi na

$$S_0(r_a^I - r_b^J) + \log\left[(C_b)^{r_b^J - r_a^I}\right] = 0\,,$$

odakle sleduje

$$\frac{I}{J} = \frac{\log r_b}{\log r_a}\,. \tag{4}$$

Zamenom (4) u (3) dobijamo

$$L_a = \frac{\theta_a\,\log r_b}{\theta_b\,\log r_a}\,L_b\,.$$

S obzirom da je „cena iteracije“ pre svega u zavisnosti od cene izračunavanja vrednosti $f^{(j)}$ za $j \geq 0$ $(f^{(0)} \equiv f)$ to je možemo definisati sa $\theta = \sum_{j\geq 0} \alpha_j \theta_j$, gde je $\theta_j$ cena, a $\alpha_j$ broj neophodnih izračunavanja $f^{(j)}$ po jednoj iteraciji. Uzmimo da je, u posmatranom slučaju, cena izračunavanja vrednosti funkcije $f$ jednaka jedinici $(\theta_0 = 1)$. Tada je

$$L_{\text{sečice}} = \frac{1.44}{1+\theta_1} L_{\text{Newton}} ,$$

pa zaključujemo da ako je cena izračunavanja prvog izvoda funkcije $f$ veća od 0.44, tada je metod sečice „jeftiniji“ (optimalniji) od Newtonovog metoda. Ovaj rezultat je dobio Jeeves.

No, vratimo se generalnom slučaju i pretpostavimo da je drugi član u (2) zanemariv u odnosu na prvi (što nastaje, na primer, ako su $C_a$ i $C_b$ bliski jedinici). Tada opet dobijamo da je

$$L_a = \frac{\theta_a \log r_b}{\theta_b \log r_a} L_b ,$$

tj.

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{\log r_b^{1/\theta_b}}{\log f_a^{1/\theta_a}} .$$

Poslednja jednakost sugeriše definisanje pojma „računske efikasnosti“ iterativne funkcije $\Phi$ u odnosu na $f$, sa

$$E = E(\Phi, f) = r^{1/\theta} , \tag{5}$$

gde je $r$ red konvergencije, $\theta = \sum \alpha_j \theta_j$, $\theta_j$ cena, a $\alpha_j$ broj neophodnih izračunavanja vrednosti $f^{(j)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ po jednoj iteraciji.

Ako $\theta_j$ fiksiramo, na primer $\theta_j = 1$, tj. učinimo ga nezavisnim od $j$, i stavimo $d = \sum \alpha_j$, tada (5) postaje nezavisno od strukture funkcije $f$, tj.

$$^{+}\mathrm{EFF} = E(\Phi) = r^{1/d} . \tag{6}$$

Jednakost (6) je koristio Ostrowski za definisanje „indeksa efikasnosti“ iterativne funkcije.

Traub predlaže definisanje pojma „informaciona efikasnost“ sa

$$\mathrm{EFF} = \frac{r}{d} . \tag{7}$$

Čini se da je ocena efikasnosti (5) bolja od (6) i (7) s obzirom da uzima u obzir cenu izračunavanja funkcije $f$ i njenih izvoda, za razliku od (6) i (7). Svakako i sama ocena (5) ima određenih manjkavosti, koje sleduju iz načina njenog dobijanja.

Cena izračunavanja vrednosti $f^{(j)}$ $(j \geq 0)$ je različita za različite klase funkcija $f$ i pri određivanju te cene veliku ulogu igra onaj ko primenjuje iterativne procese.

Tako, na primer, ako je

$$f(x) = g\left(e^x,\ \cos x,\ \sin x\right) ,$$

tada je

$$f^{(j)}(x) = h\left(e^x,\ \cos x,\ \sin x\right) .$$

Jasno je da ako uzmemo da je $\theta_0 = 1$, tada će, s obzirom da se $f^{(j)}$ sastoji od elementarnih funkcija čije su vrednosti sračunate pri izračunavanju vrednosti $f(x)$, $\theta_j$ biti mnogo manje od jedinice. U tom slučaju bi Newtonov metod, na primer, bio mnogo efikasniji od metoda sečice.

Ipak, čini se da je u praksi primene iterativnih funkcija veći broj slučajeva kada je cena izračunavanja vrednosti $f^{(j)}$ $(j \geq 1)$ veća od cene izračunavanja vrednosti $f$ (pri ovome imamo u vidu realizaciju iterativnog procesa na računskoj mašini, pa se, znači, zahteva nalaženje $f^{(j)}$ $(j \geq 1)$ kao i njeno programiranje).

*Literatura:*

T. A. Jeeves: *Secant modification of Newton's method.* Comm. ACMl, **8** (1958), 9–10.

A. Ostrowski: *Solution of Equations and Systems of Equations.* New York, 1966.

J. F. Traub: *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice–Hall, Inc., 1964.

M. A. Kovačević: *Prilozi teoriji i praksi iterativnih procesa.* Magistarski rad, Niš, 1982.

## 5.2. Sistemi nelinearnih jednačina

**5.2.1.** Metodom Newton–Kantorovića rešiti sistem nelinearnih jednačina

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1\,, \\ 2x^2 + y^2 - 4z &= 0\,, \\ 3x^2 - 4y + z^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

uzimajući početne vrednosti $x(0) = y(0) = z(0) = 0.5$.

**Rešenje.** Newton–Kantorovičev iterativni postupak za rešavanje sistema nelinearnih jednačina

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

gde je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

dat je formulom

(1) $$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) - W^{-1}(\boldsymbol{x}(k))\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

gde je $W(\boldsymbol{x})$ Jacobieva matrica za $\boldsymbol{f}$, tj.

$$W(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dake, za sistem nelinearnih jednačina dat zadatkom, imamo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}, \quad W(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix},$$

pa je

$$\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(0)) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix}, \qquad W_0 = W(\boldsymbol{x}(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det W_0 = -40$, nalazimo inverznu matricu

$$W^{-1}(\boldsymbol{x}(0)) = W_0^{-1} = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix},$$

pa, na osnovu (1), imamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{x}(0) - W_0^{-1}\boldsymbol{f}_0 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.000 \\ -0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Za $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(1)) = \boldsymbol{f}_1$ dobija se

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix}.$$

Nastavljajući iterativni proces (1), dobija se sledeći niz vektora

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} 0.78981 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.36992 \end{bmatrix}, \quad \text{itd.}$$

Ako se zadržimo na trećem koraku, približne vrednosti korena su

$$x \cong 0.7852\,, \qquad y \cong 0.4966\,, \qquad z \cong 0.3699\,,$$

dok je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(3)) = \begin{bmatrix} 0.00003 \\ 0.00006 \\ 0.00003 \end{bmatrix}.$$

**Primedba.** Pri korišćenju metoda Newton–Kantorovića (1) bilo je potrebno u svakom iterativnom koraku odrediti inverznu matricu $W^{-1}(\boldsymbol{x})$ od $W(\boldsymbol{x})$. Ovu nepogodnost možemo otkloniti tako što bismo $W^{-1}(\boldsymbol{x})$ odredili samo u prvoj iteraciji i nadalje je zadržali u procesu izračunavanja, tj.

$$\text{(2)} \qquad \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) - W^{-1}(\boldsymbol{x}(0))\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,.$$

Korišćenjem ovako modifikovanog metoda Newton–Kantorovića za rešavanje sistema nelinearnih jednačina datih zadatkom, uzimajući za početne vrednosti $x(0) = y(0) = z(0) = 0.5$, dobijamo sledeći niz vektora

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.87500 \\ 0.50000 \\ 0.37500 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} 0.72656 \\ 0.49688 \\ 0.37031 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} 0.81526 \\ 0.49663 \\ 0.36995 \end{bmatrix}, \quad \text{itd.}$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(3)) = \begin{bmatrix} 0.04815 \\ 0.09614 \\ 0.14429 \end{bmatrix}.$$

Treća iteracija po ovom metodu je, očigledno, mnogo „slabija“ od treće iteracije po metodu Newton–Kantorovića. Dakle, sa jedne strane iterativni proces (2) zahteva manje izračunavanja po iterativnom koraku od procesa (1), ali s druge strane ima manju brzinu konvergencije.

**5.2.2.** Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \log\left(x^2+y\right)+y-1=0\,,\\ g(x,y) &= \sqrt{x}+xy=0\,, \end{aligned}$$

startujući sa $(x(0),\ y(0)) = (2.4,\ -0.6)$.

**Rešenje.** Dati sistem nelinearnih jednačina možemo predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{1}$$

gde su

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}.$$

Metod Newton–Kantorovića za rešavanje sistema (1) dat je formulom

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) - W^{-1}\,(\boldsymbol{x}(k))\;\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}(k)) \qquad (k=0,1,\dots)\,, \tag{2}$$

gde je $W\,(\boldsymbol{x})$ Jacobieva matrica za $\boldsymbol{f}$, tj.

$$W\,(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y} & 1+\dfrac{1}{x^2+y} \\[2ex] y+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x \end{bmatrix}.$$

Sada nalazimo

$$W^{-1}\,(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{D(x,y)} \begin{bmatrix} x & -1-\dfrac{1}{x^2+y} \\[2ex] -y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{2x}{x^2+y} \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \frac{2x^2}{x^2+y} - \frac{x^2+y+1}{x^2+y}\cdot\frac{1+2\sqrt{x}\,y}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{x^2+y}\left[2x^2 - \left(x^2+y+1\right)\left(y+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu (2), imamo

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\[3ex] y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\[3ex] y(k) \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} x(k) & -1-\dfrac{1}{x(k)^2+y(k)} \\[2ex] -y(k)-\dfrac{1}{2\sqrt{x(k)}} & \dfrac{2x(k)}{x(k)^2+y(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k \\[3ex] g_k \end{bmatrix},$$

tj.

$$
(3)\quad \begin{cases} x(k+1) = x(k) - \dfrac{1}{D_k}\left[x(k)\, f_k - \left(1 + \dfrac{1}{x(k)^2 + y(k)}\right) g_k\right], \\[2ex] y(k+1) = y(k) - \dfrac{1}{D_k}\left[-\left(y(k) + \dfrac{1}{2\sqrt{x(k)}}\right) f_k + \dfrac{2x(k)}{x(k)^2 + y(k)}\, g_k\right], \end{cases}
$$

za $k=0,1,\ldots$ $(D_k = D\,(x(k), y(k))\,,\ f_k = f\,(x(k), y(k))\,,\ g_k = g\,(x(k), y(k)).)$

Startujući sa $x(0) = 2.4,\ y(0) = -0.6$ dobijamo

| $k$ | $x(k)$ | $y(k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 2.4 | −0.6 |
| 1 | 2.4125245 | −0.6440504 |
| 2 | 2.4122488 | −0.6438563 |
| 3 | 2.4122488 | −0.6438563 |

pa su približne vrednosti korena $x \cong 2.4122488,\ \ y \cong -0.6438563$.

**Primedba.** Sistem nelinearnih jednačina dat zadatkom možemo rešiti njegovim svođenjem na jednu nelinearnu jednačinu, te korišćenjem nekog iterativnog procesa za njeno rešavanje.

Dakle, iz uslova $g(x,y) = 0$ sleduje $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pa jednačina $f(x,y) = 0$ postaje

$$
\log\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\,,
$$

tj.

$$
(4)\qquad x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = e^{1+1/\sqrt{x}}\,.
$$

Ako stavimo $x = t^2$, na osnovu (4) imamo $t^5 = 1 + t\, e^{1+1/t}$, tj.

$$
(5)\qquad t = \sqrt[5]{1 + t\, e^{1+1/t}}\,.
$$

Sada, na osnovu (5), formirajmo metod proste iteracije

$$
t_{k+1} = \sqrt[5]{1 + t_k\, e^{1+1/t_k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)\,.
$$

Startujući sa $t_0 = \sqrt{x(0)} \cong 1.55$ dobijamo

| $k$ | $t_k$ |
|---|---|
| 0 | 1.55 |
| 1 | 1.5529427 |
| 2 | 1.5531290 |
| 3 | 1.5531408 |
| 4 | 1.5531415 |
| 5 | 1.5531416 |

pa je, dakle, $x = t^2 \cong 2.4122488$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cong -0.6438563$.

**5.2.3.** Metodom proste iteracije odrediti rešenje sistema nelinearnih jednačina

$$4y^2 + 20x + 4y - 15 = 0,$$
$$4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5 = 0,$$

koje leži najbliže koordinantnom početku.

**Rešenje.** Ukažimo na osnovna svojstva metoda proste iteracije za rešavanje sistema nelinearnih jednačina.

Neka je dat sistem od $n$ nelinearnih jednačina sa $n$ nepoznatih u obliku

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

gde je $\boldsymbol{f} = [f_1 \ \ f_2 \ \ \dots \ \ f_n]^\top$ vektorska funkcija od $n$ realnih nezavisno promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vektorskom obliku (1) odgovara skalarni oblik

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

U cilju dobijanja metoda proste iteracije transformišemo sistem (2) na ekvivalentan sistem oblika

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

gde $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \ \varphi_2 \ \ \dots \ \ \varphi_n]^\top$ nazivamo vektorskom iteracionom funkcijom. Vektorskom obliku (3) odgovara skalarni oblik

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Osnovu metoda proste iteracije čini konstrukcija niza aproksimacija $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ po formuli

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

koji, pod određenim uslovima, konvergira ka rešenju $\boldsymbol{x}^*$ sistema (4) ili, što je ekvivalentno, ka rešenju sistema (2).

Označimo sa

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ovaj metod zasnovan je na sledećoj teoremi: *Neka je vektorska funkcija* $\boldsymbol{\varphi}$ *definisana na ograničenoj, zatvorenoj, konveksnoj oblasti* $D \subset \mathbb{R}^n$*, koju preslikava u sebe, tj. za svako* $\boldsymbol{x} \in D$ *je takođe* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in D$*. Neka funkcije* $\varphi_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, imaju u* $D$ *neprekidne parcijalne izvode prvog reda po svim promenljivim* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Neka dalje egzistira konstanta* $q$*,* $0 \le q < 1$*, takva da* $\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})\| \le q$ *za svako* $\boldsymbol{x} \in D$*. Tada:*

a) *Postoji jedinstveno rešenje* $\boldsymbol{x}^* \in D$ *sistema* (4)*,*

b) *Za proizvoljni izbor startne vrednosti* $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D$ *važe ocene* (*za aproksimacije* $\boldsymbol{x}^{(k)}$ *dobijene pomoću* (5))*:*

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| \le \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

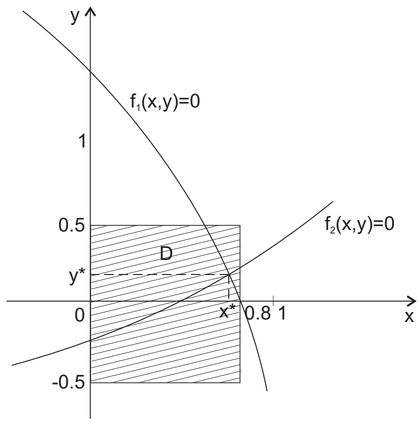
$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

c) *Iterativni metod konvergira, tj.*

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^*.$$

Pređimo sada na rešavanje našeg zadatka. Zadat je sistem u obliku $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ gde je $\boldsymbol{f} = [f_1 \quad f_2]^\top$. Ovde su

$$f_1(x, y) = 4y^2 + 20x + 4y - 15, \quad f_2(x, y) = 4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5.$$




Sl. 1.

Vektor nepoznatih je $\boldsymbol{x} = [x \;\; y]^\top$. Transformacijom jednačina sistema dobijamo oblik na osnovu kojeg možemo zaključiti koje rešenje je najbliže koordinantnom početku i skicirati oblast na kojoj metod iteracije, saglasno navedenoj teoremi, konvergira:

$$(y + 0.5)^2 = -5(x - 0.8), \qquad -\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2.5)^2}{4} = 1.$$

Transformišimo poslednji oblik sistema jednačina na oblik[14)] (4):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{(y+0.5)^2}{5} + 0.8, \\ y &= \frac{(x+1)^2 - (y+0.5)^2}{4} - 0.5. \end{aligned}$$

Rešavamo, dakle, sistem jednačina oblika (4) za $n = 2$, gde su

$$\varphi_1(x,y) = -\frac{(y+0.5)^2}{5} + 0.8, \qquad \varphi_2(x,y) = \frac{(x+1)^2 - (y+0.5)^2}{4} - 0.5.$$

Odredimo zatvorenu oblast $D$ koja sadrži traženo rešenje i ispunjava uslove iz teoreme. (Ovde se u praksi mogu pojaviti ne mali problemi jer uslovi teoreme ne moraju biti ispunjeni u okolini rešenja. U tom slučaju ne preostaje nam ništa drugo do da se menja iterativna funkcija $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \;\; \varphi_2]^\top$ ili koristi drugi metod za rešavanje problema.)

---

14) Takvih oblika ima mnogo. Ovde je izabran jedan od njih.

Pokažimo sada da pravougaona oblast

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\ 0.8],\ \ y \in [-0.5,\ 0.5]\Big\}$$

ispunjava uslove teoreme. (Šrafirana oblast na slici 1 je oblast $D$.)

Najpre pokažimo da funkcija $\boldsymbol{\varphi}$ preslikava oblast $D$ u samu sebe. Funkcija $\varphi_1$, koja zavisi samo od $y$, za $y \in [-0.5, 0.5]$ je monotona i u $D$ dobija minimalnu vrednost 0.6, a maksimalnu 0.8. Pri ispitivanju funkcije $\varphi_2$ imamo u vidu da izraz $(x+1)^2 - (y+0.5)^2$, kao razlika monotonih funkcija, dobija u $D$ vrednosti iz intervala $[0,\ 1.8^2]$. Dakle, $\varphi_2$ dobija u $D$ minimalnu vrednost $-0.5$, a maksimalnu 0.31. Zato vektorska funkcija $\boldsymbol{\varphi}$ preslikava $D$ u zatvorenu pravougaonu oblast

$$D_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0.6,\ 0.8],\ \ y \in [-0.5,\ 0.31]\Big\},$$

tako da važi $D_1 \subset D$. Parcijalni izvodi funkcija $\varphi_1$ i $\varphi_2$ su neprekidne funkcije u oblasti $D$. Odredimo matricu parcijalnih izvoda (6) i njenu $\|\cdot\|_1$ normu:

$$\boldsymbol{\varphi}'(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4(y+0.5) \\ & \\ 0.5(x+1) & -0.5(y+0.5) \end{bmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}'\|_1 = \max_{(x,y)\in D} \Big\{0.5|x+1|,\ 0.9|y+0.5|\Big\} = 0.9.$$

Dakle, ispunjeni su uslovi teoreme, pri čemu $q = 0.9$. Pri proizvoljnom izboru startne vrednosti iz $D$ dobijamo konvergentni iterativni proces:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \varphi_2(x_k, y_k), \quad k = 0, 1,\ \ldots\ . \end{aligned}$$

Pri izboru $x_0 = y_0 = 0$ imamo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{(0+0.5)^2}{5} + 0.8 = 0.75000, \\ y_1 &= \frac{(0+1)^2 - (0+0.5)^2}{4} - 0.5 = -0.31250. \end{aligned}$$

U priloženoj tabeli dajemo rezultate aproksimacija $x_k$, $y_k$ za $k = 0, 1, \ldots, 16$ zaokrugljene na 5 decimalnih mesta. Izračunavanje daljih aproksimacija ne dovodi do povećavanja tačnosti rezultata, s obzirom na korišćenu aritmetiku konačne dužine.

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $k$ | $x_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 | 9 | 0.71889 | 0.13788 |
| 1 | 0.75000 | −0.31250 | 10 | 0.71862 | 0.13692 |
| 2 | 0.79297 | 0.25684 | 11 | 0.71887 | 0.13700 |
| 3 | 0.68544 | 0.16048 | 12 | 0.71885 | 0.13718 |
| 4 | 0.71275 | 0.10112 | 13 | 0.71880 | 0.13711 |
| 5 | 0.72773 | 0.14304 | 14 | 0.71882 | 0.13709 |
| 6 | 0.71730 | 0.14289 | 15 | 0.71882 | 0.13711 |
| 7 | 0.71734 | 0.13395 | 16 | 0.71882 | 0.13711 |
| 8 | 0.71962 | 0.13684 | | | |

Isti problem rešićemo sada metodom Newton–Kantorovića. Dakle, rešavamo sistem nelinearnih jednačina:

$$f_1(x,y) \equiv 4y^2 + 20x + 4y - 15 = 0,$$
$$f_2(x,y) \equiv 4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5 = 0,$$

čije rešenje leži u zatvorenoj pravougaonoj oblasti $D = [0, 0.8] \times [-0.5, 0.5] \subset \mathbb{R}^2$. Funkcije $f_1$ i $f_2$ imaju u $\mathbb{R}^2$, a dakle i u $D$ neprekidne parcijalne izvode

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 20, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 8y + 4, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 8x + 8, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -8y - 20,$$

i važi $\det(W(x,y)) \neq 0$. Sistem jednačina

$$W(x_k, y_k)\big[x_{k+1} - x_k \quad y_{k+1} - y_k\big]^\top = -\boldsymbol{f}([x_k \quad y_k]^\top)$$

za $k = 0, 1, \ldots$ ima oblik

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Izaberimo startnu aproksimaciju $x_0 = y_0 = 0$. Zamenom $k = 0$ u (7) dobijamo sistem linearnih jednačina

$$20(x_1 - x_0) + 4(y_1 - y_0) = 15,$$
$$8(x_1 - x_0) - 20(y_1 - y_0) = 5,$$

čija determinanta je $-432$, a rešenje

$$x_1 - x_0 = 0.74074, \quad y_1 - y_0 = 0.04630.$$

Dakle,

$$x_1 = x_0 + 0.74074 = 0.74074, \quad y_1 = y_0 + 0.04630 = 0.04630.$$

Dalje, za $k = 1$, (7) se svodi na sistem jednačina

$$\begin{aligned} 20(x_2 - x_1) + 4.37037(y_2 - y_1) &= -0.00858, \\ 13.925(x_2 - x_1) - 20.37037(y_2 - y_1) &= -2.18613, \end{aligned}$$

čija determinanta je $-468.25$, a rešenje je

$$x_2 - x_1 = -0.02078, \quad y_2 - y_1 = 0.09312,$$

tj.

$$x_2 = x_1 + 0.02078 = 0.71996, \quad y_2 = y_1 + 0.09312 = 0.13942.$$

U sledećoj tabeli dajemo vrednosti $x_k$, $y_k$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ i vrednosti determinante sistema (7). Kao i ranije, ako koristimo aritmetiku samo sa pet cifara, daljim iteracijama nije moguće dobiti tačnije aproksimacije.

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $\det(W(x_k, y_k))$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 | $-432.00$ |
| 1 | 0.74074 | 0.04630 | $-468.25$ |
| 2 | 0.71996 | 0.13942 | $-494.92$ |
| 3 | 0.71882 | 0.13711 | $-492.02$ |
| 4 | 0.71882 | 0.13711 | $-492.02$ |

**Primedba.** Upoređivanje tabela pokazuje da metod Newton–Kantorovića konvergira brže od metoda proste iteracije. Naravno, razlog tome je kvadratna konvergencija metoda Newton–Kantorovića u odnosu na linearnu konvergenciju metoda proste iteracije, koji uz to ima $q$ blisko jedinici.

**5.2.4.** Odrediti ekstrem funkcije

$$f(x, y) = 3x^3 + 2y^2 + xy^2 - 10x - 5y - 1,$$

koji leži u okolini tačke $(1, 1)$.

**Rešenje.** Potrebno je rešiti sistem jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

tj. sistem

$$9x^2 + y^2 - 10 = 0, \quad 4y + 2xy - 5 = 0,$$

u okolini tačke $(1, 1)$. Transformišimo dati sistem na oblik

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{10 - y^2}\,, \qquad y = \frac{1}{4}(5 - 2xy).$$

Tada, određujemo niz tačaka $(x_k, y_k)$ metodom proste iteracije

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\sqrt{10 - y_k^2}\,,$$
$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(5 - 2x_k y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ \ldots\ ,$$

startujući sa $x_0 = 1,\ y_0 = 1$.

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $10 - y_k^2$ | $2x_k y_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 9.00000 | 2.0000 |
| 1 | 1.0000 | 0.7500 | 9.43750 | 1.5000 |
| 2 | 1.0240 | 0.8750 | 9.23437 | 1.7920 |
| 3 | 1.0129 | 0.8020 | 9.35680 | 1.6245 |
| 4 | 1.0196 | 0.8439 | 9.28783 | 1.7152 |
| 5 | 1.0159 | 0.8212 | 9.32563 | 1.6688 |
| 6 | 1.0179 | 0.8328 | 9.30644 | 1.6954 |
| 7 | 1.0169 | 0.8261 | 9.31748 | 1.6801 |
| 8 | 1.0171 | 0.8300 | 9.31110 | 1.6884 |
| 9 | 1.0171 | 0.8279 | 9.31458 | 1.6841 |
| 10 | 1.0173 | 0.8290 | 9.31276 | 1.6867 |
| 11 | 1.0172 | 0.8283 | 9.31387 | 1.6852 |
| 12 | 1.0173 | 0.8287 | 9.31324 | 1.6861 |
| 13 | 1.0173 | 0.8285 | | |

U ovom slučaju, pre početka iterativnog procesa nismo ispitali uslove za njegovu konvergenciju, no na osnovu generisanih vrednosti $x_k$, $y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, konvergencija je evidentna.

Iz tabele se može videti da je rešenje sistema $x \approx 1.0173,\ y \approx 0.8285$. S obzirom da je u toj tački

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0,$$

zaključujemo da funkcija u toj tački ima strogi lokalni minimum. Odgovarajuća vrednost funkcije je $-10.086$.

**5.2.5.** Dat je sistem nelinearnih jednačina:

$$e^{x^2+y^2} = 3,$$
$$x + y - \sin 3(x+y) = 0.$$

Konstruisati Newtonov metod za rešavanje ovog sistema.

**Rešenje.** Uvedimo smenu promenljivih

$$x^2 + y^2 = u, \qquad x + y = v,$$

kojom sistem svodimo na oblik

$$e^u = 3, \qquad v - \sin 3v = 0.$$

Iz prve jednačine poslednjeg sistema dobijamo $u = \ln 3 \cong 1.098612$. Za drugu jednačinu imamo tri rešenja, što se može lako zaključiti skiciranjem grafika. Jedno rešenje je $v_0 = 0$. Drugo rešenje se dobija primenom Newtonovog metoda na jednačinu

$$f(v) = v - \sin 3v,$$

dok je treće rešenje kao i drugo, samo suprotnog znaka. Dakle, imamo

$$v_1 \cong 0.759621, \qquad v_2 \cong -0.759621.$$

Sada treba rešiti sisteme nelinearnih jednačina

$$(1) \qquad x^2 + y^2 \cong 1.098612, \qquad x + y = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 \cong 1.098612, \qquad x + y \cong 0.759621,$$

$$(3) \qquad x^2 + y^2 \cong 1.098612, \qquad x + y \cong -0.759621.$$

Sistem (1) se jednostavno rešava. Njegova rešenja su:

$$x \cong 0.741152, \quad y \cong -0.741152,$$

i

$$x \cong -0.741152, \quad y \cong 0.741152.$$

Za sistem (2), takođe, postoje dva rešenja. Nalazimo ih primenom metoda Newton–Kantorovića na sistem jednačina

$$f_1(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1.098612 \cong 0,$$
$$f_2(x,y) \equiv x + y - 0.759612 \cong 0.$$

Startni vektor odredimo tako da druga jednačina bude zadovoljena tačno, a prva približno. Dakle,

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.240388 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.040830 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$W(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad W^{-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2(x-y)} \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ -1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Za prvu iteraciju imamo

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.016459 \\ -0.256838 \end{bmatrix}.$$

Dalje je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.000543 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.392681 & 0.201711 \\ -0.392681 & 0.798289 \end{bmatrix}.$$

Druga iteracija je

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1.016246 \\ -0.256625 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \end{bmatrix},$$

možemo uzeti da je

$$x \cong 1.01625, \quad y \cong -0.25662.$$

S obzirom na simetriju sistema (2) u odnosu na $x$ i $y$, drugo rešenje je dato sa

$$x \cong -0.25662, \quad y \cong 1.01625.$$

Sistem (3) se uvođenjem smene $x = -x_1,\ y = -y_1$ svodi na sistem (2) pa su njegova rešenja

$$x \cong 0.25662,\ y \cong -1.01625, \quad \text{ili} \quad x \cong -1.01625,\ y \cong 0.25662.$$

**5.2.6.** Gradijentnim metodom približno naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x + x^2 - 2yz &= \phantom{-}0.1\,, \\ y - y^2 + 3xz &= -0.2\,, \\ z + z^2 + 2xy &= \phantom{-}0.3\,, \end{aligned}$$

koja se nalaze u okolini koordinatnog početka.

**Rešenje.** Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{1}$$

gde su

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, definišimo skalarni proizvod pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x}\,.$$

Kod gradijentnog metoda iterativni proces za rešavanje sistema nelinearnih jednačina (1) dat je formulom

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) - \lambda_k\, \nabla u\,(\boldsymbol{x}(k)) \qquad (k = 0, 1, \dots)\,, \tag{2}$$

gde je

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\boldsymbol{x})]^2 = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,.$$

Kako je

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = 2\, W^\top(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,,$$

gde je $W(\boldsymbol{x})$ Jacobieva matrica za $\boldsymbol{f}$, na osnovu (2), imamo

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) - \mu_k\, W_k^\top\, \boldsymbol{f}_k \qquad (k = 0, 1, \dots)\,, \tag{3}$$

gde je

$$\mu_k = 2\lambda_k = \frac{\Big(\boldsymbol{f}_k,\ W_k\, W_k^\top\, \boldsymbol{f}_k\Big)}{\big(W_k\, W_k^\top\, \boldsymbol{f}_k,\ W_k\, W_k^\top\, \boldsymbol{f}_k\big)}$$

$(\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))\,,\ W_k = W(\boldsymbol{x}(k)))$.

Za dati sistem nelinearnih jednačina imamo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x + x^2 - 2yz - 0.1 \\ y - y^2 + 3xz + 0.2 \\ z + z^2 + 2xy - 0.3 \end{bmatrix},$$

$$W(\boldsymbol{x}) = \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 + 2x & -2z & -2y \\ 3z & 1 - 2y & 3x \\ 2y & 2x & 1 + 2z \end{bmatrix}.$$

Kako je za $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$,

$$\boldsymbol{f}_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

imamo

$$\mu_0 = \frac{(\boldsymbol{f}_0,\ \boldsymbol{f}_0)}{(\boldsymbol{f}_0,\ \boldsymbol{f}_0)} = 1 \qquad \Big( W_0 = W_0^\top = I \Big),$$

pa, na osnovu (3), dobijamo

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{x}(0) - 1 \cdot I\, \boldsymbol{f}_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 1.4 & 0.3 \\ -0.4 & 0.2 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad W_1 W_1^\top \boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.2748 \\ 0.2098 \\ 0.1632 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1 = \frac{0.13 \cdot 0.2748 + 0.05 \cdot 0.2098 + 0.05 \cdot 0.1632}{0.2748^2 + 0.2098^2 + 0.1632^2} \cong 0.3720,$$

pa je

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} - 0.3720 \begin{bmatrix} 0.181 \\ 0.002 \\ 0.147 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.0327 \\ -0.2007 \\ 0.2453 \end{bmatrix},$$

s obzirom na

$$W_1^\top \boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.181 \\ 0.002 \\ 0.147 \end{bmatrix}.$$

Ako se zadržimo na drugom koraku, približne vrednosti odgovarajućeg rešenja su

$$x \cong 0.0327, \qquad y \cong -0.2007, \qquad z \cong 0.2453,$$

dok je

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}(2)) \cong \begin{bmatrix} 0.032 \\ -0.017 \\ -0.008 \end{bmatrix}.$$

## 5.3. Algebarske jednačine

**5.3.1.** Primenom Bernoullievog metoda naći realnu dominantnu nulu $x_1$ polinoma

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 18x - 22\,.$$

**Rešenje.** U slučaju kada je dominantna nula polinoma realna ili kada je dominantna nula realna i višestruka, po Bernoullievom metodu treba postupiti na sledeći način.

Jednačinu $P(x) = 0$ posmatramo kao karakterističnu jednačinu linearne homogene diferencne jednačine reda $m = \mathrm{dg}\,(P(x)) = 3$, tj.

$$2y_{n+3} - 7y_{n+2} - 18y_{n+1} - 22y_n = 0$$

ili

(1) $$y_{n+3} = 3.5y_{n+2} + 9y_{n+1} + 11y_n\,.$$

Na osnovu (1), uz početne uslove $y_0 = y_1 = \cdots = y_{m-2} = 0,\ y_{m-1} = 1$, formiramo niz $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Korišćenjem niza $\{y_k\}$ konstruišemo niz $\{u_k\}$ pomoću $u_k = \dfrac{y_{k+1}}{y_k}$. Tada važi (videti [1, str. 399–402])

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = x_1.$$

S obzirom na konačnost izračunavanja uzimamo $x_1 \cong u_k$, ako je $|u_k - u_{k-1}| < \varepsilon$, gde je $\varepsilon$ unapred zadata tačnost.

Dakle, na osnovu prethodnog, uzimajući $y_0 = y_1 = 0,\ y_2 = 1$ imamo

| $k$ | $y_k$ | $u_k$ |
|---|---|---|
| 2 | 1. | 3.5000 |
| 3 | 3.5 | 6.0714 |
| 4 | 21.25 | 5.5000 |
| 5 | 116.875 | 5.4658 |
| 6 | 638.8125 | 5.5125 |
| 7 | 3521.46875 | 5.4977 |
| 8 | 19360.07813 | 5.5000 |
| 9 | 106480.4297 | |

pa uzimamo $x_1 \cong u_8 = 5.5000$ što je, u ovom slučaju, i tačna vrednost dominantne nule polinoma $P$.

**5.3.2.** Primenom Bernoullievog metoda odrediti realne i različite dominantne korene $x_1$ i $x_2$ $(x_1 = -x_2)$ jednačine

$$P(x) = x^4 - 1.5x^3 - 3.5x^2 + 6x - 2 = 0\,.$$

**Rešenje.** U slučaju kada su dominantni koreni realni i suprotni po znaku (jedan višestruk reda $p$, a drugi reda $q$), po Bernoullievom metodu treba postupiti na sledeći način.

Jednačinu $P(x) = 0$ tretiramo kao karakterističnu jednačinu linearne homogene diferencne jednačine reda $m = \mathrm{dg}(P) = 4$, tj.

$$y_{n+4} - 1.5\,y_{n+3} - 3.5\,y_{n+2} + 6\,y_{n+1} - 2\,y_n = 0$$

ili

$$y_{n+4} = 1.5\,y_{n+3} + 3.5\,y_{n+2} - 6\,y_{n+1} + 2\,y_n\,. \tag{1}$$

Na osnovu (1), uz početne uslove $y_0 = y_1 = \cdots = y_{m-2} = 0$, $y_{m-1} = 1$, formiramo niz $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Ako bismo sada generisali niz $\{u_k\}$, gde je $u_k = \dfrac{y_{k+1}}{y_k}$ uočili bismo da on divergira. No, u ovom slučaju formiramo niz $\{v_k\}$, gde je $v_k = \dfrac{y_{2k+2}}{y_{2k}}$, za koji važi (videti [1, str. 403])

$$\lim_{k\to+\infty} v_k = x_1^2\,.$$

Dakle, na osnovu prethodnog, uzimajući $y_0 = y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 1$, dobijamo

| $k$ | $y_k$ | $u_k$ | $v_{k/2}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 1. | 1.5000 | |
| 4 | 1.5 | 3.8333 | 5.2500 |
| 5 | 5.75 | 1.3696 | |
| 6 | 7.875 | 3.1667 | 4.2500 |
| 7 | 24.9375 | 1.3421 | |
| 8 | 33.46875 | 3.0397 | 4.0595 |
| 9 | 101.734375 | 1.3355 | |
| 10 | 135.8671875 | | |

Primetimo da niz $\{u_k\}$ divergira, a da niz $\{v_k\}$ konvergira, što može i da posluži kao kriterijum za egzistenciju slučaja da su dominantni koreni realni i suprotni po znaku. Niz $\{v_k\}$ konvergira ka $x_1^2 = 4$, pa je $x_1 = -x_2 = 2$.

**5.3.3.** Primenom Bernoullievog metoda naći par konjugovano kompleksnih dominantnih korena jednačine $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$.

**Rešenje.** U slučaju kada algebarska jednačina $P(x) = 0$ ima par konjugovano kompleksnih dominantnih korena, $x_1 = \rho e^{i\theta}$ i $x_2 = \rho e^{-i\theta}$, na osnovu Bernoullievog metoda, jednačinu $P(x) = 0$ tretiramo kao karakterističnu jednačinu linearne homogene diferencne jednačine reda $m = \mathrm{dg}(P) = 3$, dakle,

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} - 7y_{n+1} + 5y_n \,. \tag{1}$$

Polazeći od $y_0 = y_1 = \cdots = y_{m-2} = 0$, $y_{m-1} = 1$, formiramo niz $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Ranije definisani nizovi $\{u_k\}$ i $\{v_k\}$ (videti zadatak 5.3.2) u ovom slučaju divergiraju. Zato definišimo nove nizove $\{s_k\}$ i $\{t_k\}$ pomoću

$$s_k = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ y_{k-1} & y_k \end{vmatrix} = y_k^2 - y_{k-1}\, y_{k+1}$$

i

$$t_k = \begin{vmatrix} y_{k+1} & y_{k+2} \\ y_{k-1} & y_k \end{vmatrix} = y_{k+1}\, y_k - y_{k-1}\, y_{k+2}\,,$$

za koje važi

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{s_{k+1}}{s_k} = \rho^2 \qquad \text{i} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_k}{2s_k} = \rho\,\cos\theta\,.$$

Dakle, na osnovu prethodnog, uzimajući $y_0 = y_1 = 0$, $y_2 = 1$ i korišćenjem (1) dobijamo niz

$$\{y_k\}=\{0,\, 0,\, 1,\, 3,\, 2,\, -10,\, -29,\, -7,\, 132,\, 300,\, -59,\, -1617,\, -2938,\, 2210,\, 1911,\, \dots\}.$$

Kako je $s_{12} = (-2938)^2 - (-1617)\cdot 2210 = 12205414$, $s_{13} = (2210)^2 - (-2938)\cdot 19111 = 61032218$, $t_{12} = 2210\cdot(-2938) - (-1617)\cdot 1911 = 24409507$, nalazimo

$$\rho^2 \cong \frac{s_{13}}{s_{12}} \cong 5.0004\,, \qquad \rho\,\cos\theta \cong \frac{t_{12}}{2s_{12}} \cong 0.9999\,,$$

a dalje je

$$x_1 = \rho\,\cos\theta + i\big(\rho^2 - (\rho\cos\theta)^2\big)^{1/2} \cong 0.9999 + i\big(5.0004 - (0.9999)^2\big)^{1/2},$$

tj. $x_1 \cong 0.9999 + 2.0001\,i$, dok je $x_2 = \bar{x}_1$. Prmetimo da su tačne vrednosti korena $x_1 = \bar{x}_2 = 1 + 2i$.

**5.3.4.** Odrediti sve korene algebarske jednačine $P(x) = 0$, gde je

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2\,.$$

Za početne aproksimacije korena uzeti $x_1(0)=-1.1$, $x_2(0)=0.9$, $x_3(0)=1.9$.

**Rešenje.** U novije vreme razrađen je veliki broj metoda za simultano (istovremeno) određivanje svih korena algebarske jednačine

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \,, \tag{1}$$

gde su $a_i$ $(i = 1, \dots, n)$, u opštem slučaju, kompleksni koeficijenti.

Jedan od metoda za simultano nalaženje nula polinoma (1), čije su nule međusobno različite, dat je sa

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \frac{P\,(x_i(k))}{\displaystyle\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} (x_i(k) - x_m(k))} \qquad (i = 1, \dots, n;\; k = 0, 1, \dots) \tag{2}$$

(videti [1, str. 417–419]). Iterativni proces (2) ima kvadratnu konvergenciju.

Jedna od mogućih modifikacija metoda (2), koja zahvata manje memorijskog prostora kod realizacije na računskim mašinama, je varijanta koja koristi ideju Gauss–Seidelovog metoda (u trenutku izračunavanja vrednosti $x_i(k+1)$ poznate su vrednosti $x_1(k+1)$, $x_2(k+1), \dots ,$ $x_{i-1}(k+1)$ koje su tačnije, u opštem slučaju, od vrednosti $x_1(k), \dots ,$ $x_{i-1}(k)$)

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \frac{P(x_i(k))}{\displaystyle\prod_{m=1}^{i-1} (x_i(k) - x_m(k+1)) \prod_{m=i+1}^{n} (x_i(k) - x_m(k))} \,. \tag{3}$$

Primenom procesa (2) i (3) na rešavanje jednačine postavljene zadatkom, uz korišćenje datih startnih vrednosti, dobijeni su sledeći rezultati:

| metod (2) | | | |
|---|---|---|---|
| $k$ | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ |
| 0 | $-1.1$ | 0.9 | 1.9 |
| 1 | $-0.991500000$ | 1.004500000 | 1.987000000 |
| 2 | $-1.000017852$ | 0.999921041 | 2.000096811 |
| 3 | $-1.000000000$ | 0.999999992 | 2.000000008 |

| metod (3) | | | |
|---|---|---|---|
| $k$ | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ |
| 0 | $-1.1$ | 0.9 | 1.9 |
| 1 | $-0.991500000$ | 1.010494317 | 2.001477225 |
| 2 | $-0.999951270$ | 1.000015390 | 1.999999953 |
| 3 | $-1.000000000$ | 1.000000000 | 2.000000000 |

Primetimo da su tačne vrednosti korena $x_1 = -1,\; x_2 = 1,\; x_3 = 2$.

# VI G L A V A

# Interpolacija i aproksimacija

## 6.1. Interpolacija funkcija

**6.1.1.** Dat je sistem funkcija

$$\left\{ \frac{1}{P(x)}, \frac{x}{P(x)}, \dots, \frac{x^n}{P(x)} \right\}, \tag{1}$$

gde je $P$ algebarski polinom koji nema nula na $[a,b]$. Dokazati da je (1) Čebiševljev sistem.

**Rešenje.** S obzirom da je $P(x) \neq 0$ $(\forall x \in [a,b])$ možemo definisati sistem funkcija $\Phi_k : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, pomoću $\Phi_k(x) = \dfrac{x^k}{P(x)}$ $(k = 0,1,\dots,n)$. Neka su $x_k$ $(k = 0,1,\dots,n)$ proizvoljni čvorovi na $[a,b]$ uz jedini uslov da su međusobno različiti.

Primetimo da je sistem funkcija (1) linearno nezavisan. Da bismo dokazali da je i Čebiševljev sistem, dovoljno je dokazati da je matrica:

$$G = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \cdots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

regularna za bilo koji skup tačaka $x_0,\ x_1, \dots,\ x_n$ $(x_i = x_j \Leftrightarrow i = j)$.

Zaista, kako je

$$\det G = \frac{1}{P(x_0)P(x_1)\cdots P(x_n)} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{vmatrix}$$

zaključujemo da je

$$\det G = \frac{\prod\limits_{i>j} (x_i - x_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n} P(x_i)} \neq 0\,,$$

s obzirom da su čvorovi $x_k$ međusobno različiti.

U specijalnom slučaju, kada je $P(x) \equiv 1$, $\det G$ se svodi samo na Vandermondeovu determinantu

$$\det G = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0\,.$$

**6.1.2.** Ako su $a_k$ $(k = 1, \dots, n)$ međusobno različiti pozitivni brojevi, dokazati da je sistem funkcija

$$\left\{1,\ \frac{1}{a_1 + x}, \dots,\ \frac{1}{a_n + x}\right\}$$

Čebiševljev sistem na $[0, +\infty)$.

**Rešenje.** Stavimo $\Phi_0(x) = 1$, $\Phi_k(x) = \dfrac{1}{a_k + x}$ $(k = 1, \dots, n)$. Dokaz ćemo sada izvesti drugačije u odnosu na prethodni zadatak. Naime, iskoristićemo tvrđenje teoreme 2.1.1 iz [2, str. 11], prema kome je sistem funkcija Čebiševljev, ako su sve Wronskyeve determinante

$$W_k = \begin{vmatrix} \Phi_0(x) & \Phi_1(x) & \cdots & \Phi_k(x) \\ \Phi_0'(x) & \Phi_1'(x) & & \Phi_k'(x) \\ \vdots & & & \\ \Phi_0^{(k)}(x) & \Phi_1^{(k)}(x) & & \Phi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix} \qquad (k = 0, 1, \dots, n)$$

različite od nule. U našem slučaju za $k = 0$ i $k = 1$ imamo

$$W_0 = \Phi_0(x) = 1\,, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_1 + x} \\ 0 & \dfrac{1}{(a_1 + x)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(a_1 + x)^2}\,.$$

Na dalje, za $k > 1$, imamo

$$W_k = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_1 + x} & \cdots & \dfrac{1}{a_k + x} \\ 0 & \dfrac{-1}{(a_1 + x)^2} & & \dfrac{-1}{(a_k + x)^2} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dfrac{(-1)^k \, k!}{(a_1 + x)^{k+1}} & & \dfrac{(-1)^k \, k!}{(a_k + x)^{k+1}} \end{vmatrix},$$

tj.

$$W_k = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \, i!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (a_i + x)^2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{1}{a_1 + x} & & \dfrac{1}{a_k + x} \\ \vdots & & \\ \dfrac{1}{(a_1 + x)^{k-1}} & & \dfrac{1}{(a_k + x)^{k-1}} \end{vmatrix}.$$

Kako je determinanta na desnoj strani u poslednjoj jednakosti Vandermondeova, to je

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \, i!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (a_i + x)^2} \prod_{i>j} \left( \frac{1}{a_i + x} - \frac{1}{a_j + x} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k(k+1)/2} \prod\limits_{i=1}^{k} i! \prod\limits_{i>j} (a_j - a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{k} (a_i + x)^2 \prod\limits_{i>j} (a_i + x)(a_j + x)}, \end{aligned}$$

tj.

$$W_k = (-1)^{k(k+1)/2} \prod_{i=1}^{k} \frac{i!}{(a_i + x)^{k+1}} \prod_{i>j} (a_j - a_i) \; .$$

S obzirom da su $a_i$ međusobno različiti pozitivni brojevi, zaključujemo da je $W_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ za svako $x \in [0, +\infty)$, čime je dokaz završen.

**6.1.3.** Ispitati da li sistem funkcija

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx\} \tag{1}$$

obrazuje Čebiševljev sistem na $[-\pi,\ \pi)$.

**Rešenje.** Neka su $x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ međusobno različiti, a inače proizvoljni čvorovi na $[-\pi,\ \pi)$. Oni se tada mogu urediti tako da je

$$-\pi \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \pi\,. \tag{2}$$

Sistem funkcija (1) je linearno nezavisan. Da bismo dokazali da je Čebiševljev sistem dovoljno je pokazati da je matrica

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{bmatrix}$$

regularna. Kako je

$$\det G = (-1)^{n(n-1)/2} 2^{2n^2} \prod_{j=1}^{2n} \left( \prod_{k=0}^{j-1} \sin \frac{x_j - x_k}{2} \right),$$

s obzirom na (2) zaključujemo da je $\det G \ne 0$, tj. da je matrica $G$ regularna.

Sistem funkcija (1) koristi se za konstrukciju trigonometrijskog interpolacionog polinoma za funkciju $f : [-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{R}$ na osnovu njenih vrednosti $f_k = f(x_k)$ u interpolacionim čvorovima $x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Sa $T_n$ označimo pomenuti trigonometrijski interpolacioni polinom. Može se pokazati da jedna od mogućih reprezentacija polinoma $T_n$ ima oblik

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n} \left( \frac{\sin \dfrac{x - x_j}{2}}{\sin \dfrac{x_k - x_j}{2}} \right). \tag{3}$$

Primetimo da je $T_n(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Trigonometrijski interpolacioni polinom (3) predstavlja analogon Lagrangeovom interpolacionom polinomu.

**6.1.4.** Aproksimirati funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$, na segmentu $[0,\ 0.5]$, interpolacionim polinomom.

**Rešenje.** Ako je funkcija $f$ data svojim vrednostima $f_k \equiv f(x_k)$ u tačkama $x_k$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, možemo je aproksimirati polinomom

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n\,, \tag{1}$$

pri čemu je $P_n(x_k) = f_k$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Polinom (1) se zove interpolacioni polinom.

Može se dokazati (videti [2, str. 12]) da je polinom (1) jedinstven, no on se može formirati na različite načine.

Ako polinom (1) konstruišemo na osnovu

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)\,, \tag{2}$$

gde je

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}\,,$$

tada ga zovemo Lagrangeovim interpolacionim polinomom.

Ako koristimo podeljene razlike reda $r$, koje se definišu rekurzivno pomoću

$$[x_0, x_1, \dots, x_r; f] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_r; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{r-1}; f]}{x_r - x_0}\,,$$

pri čemu je $[x; f] = f(x)$, tada polinom (1) možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)\,[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)\,[x_0, x_1, x_2; f] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\,[x_0, x_1, \dots, x_n; f]\,, \end{aligned} \tag{3}$$

i naziva se Newtonov interpolacioni polinom.

Neka $f \in C^{n+1}[a, b]$ i $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. Tada postoji $\xi \in (a, b)$ takvo da se greška interpolacionog polinoma (1) može predstaviti u obliku

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)\,, \tag{4}$$

gde je $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ (videti [2, str. 14]).

Aproksimirajmo sada funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$, na segmentu [0, 0.5], interpolacionim polinomom, na osnovu sledećih podataka

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0.0 | 0.2 | 0.5 |
| $f(x_k)$ | 1.000000 | 1.221403 | 1.648721 |

Lagrangeov interpolacioni polinom (2), za ovaj skup podataka, glasi

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 1\,\frac{(x-0.2)(x-0.5)}{(0-0.2)(0-0.5)} + 1.221403\,\frac{(x-0.2)(x-0.5)}{(0.2-0)(0.2-0.5)} \\
&\quad + 1.648721\,\frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.5-0)(0.5-0.2)} \\
&= 0.634757\,x^2 + 0.980064\,x + 1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

pri čemu su svi rezultati zaokruženi na šest decimala.

U cilju konstruisanja Newtonovog interpolacionog polinoma (3), najpre formiramo, na osnovu prethodne tabele, tablicu podeljenih razlika

(6)

| $k$ | $[x_k; f]$ | $[x_k, x_{k+1}; f]$ | $[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.000000 | | |
| | | 1.107015 | |
| 1 | 1.221403 | | 0.634756 |
| | | 1.424393 | |
| 2 | 1.648721 | | |

odakle je, na osnovu (3),

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 1 + 1.107015\,(x-0) + 0.634756\,(x-0)(x-0.2) \\
&= 0.634756\,x^2 + 0.980064\,x + 1\,,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

pri čemu su svi rezultati zaokrugljeni na šest decimala.

Kao što je rečeno, teorijski, interpolacioni polinom je jedinstven. Prema tome, Lagrangeov interpolacioni polinom (5) i Newtonov (7) bi trebalo da budu identički jednaki. Međutim, upoređivanjem (5) i (7) uočavamo da se koeficijenti uz $x^2$ razlikuju za $10^{-6}$. To je posledica grešaka zaokrugljivalja koje se neminovno javljaju u procesu izračunavanja na računskim mašinama. Zbog toga se, zavisno od svrhe, često daje prednost interpolacionom polinomu dobijenom na jedan način u odnosu na interpolacioni polinom dobijen na neki drugi način.

Primetimo da konstrukcija Newtonovog interpolacionog polinoma zahteva prethodno formiranje tablice podeljenih razlika, što nije bio slučaj kod Lagrangeove interpolacije.

S obzirom da je $f^{(k)}(x) = (e^x)^{(k)} = e^x$ $(k = 1, 2, \dots)$, na osnovu (4) imamo

$$
|f(x) - P_2(x)| \le \frac{M}{3!}\,|\,x\,(x-0.2)\,(x-0.5)\,| \qquad (0 \le x \le 0.5)\,,
$$

gde je

$$M = \max_{x\in[0,0.5]} \left|e^x\right| = e^{0.5} \cong 1.648721\,. \tag{8}$$

Ako hoćemo da smanjimo grešku interpolacionog polinoma, to najjednostavnije možemo učiniti uvođenjem novog interpolacionog čvora. Izaberimo, na primer, $x_3 = 0.4$, pa je $f(x_3) = 1.491825$. Za tu svrhu Newtonov interpolacioni polinom je znatno pogodniji od Lagrangeovog, jer ne zahteva ponavljanje celog računskog postupka. Naime korišćenjem Newtonove interpolacije, imamo

$$P_3(x) = P_2(x) + (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,[x_0, x_1, x_2, x_3; f]\ .$$

Dakle, dopunimo tablicu konačnih razlika (6) novouvedenim interpolacionim čvorom $x_3$:

| $k$ | $[x_k; f]$ | $[x_k, x_{k+1}; f]$ | $[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]$ | $[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}; f]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.000000 | | | |
| | | 1.107015 | | |
| 1 | 1.221403 | | 0.634756 | |
| | | 1.424393 | | 0.220198 |
| 2 | 1.648721 | | 0.722835 | |
| | | 1.568960 | | |
| 3 | 1.491825 | | | |

Odavde je

$$\begin{aligned} P_3(x) &= P_2(x) + 0.220198\,x\,(x - 0.2)\,(x - 0.5) \\ &= 0.220198\,x^3 + 0.480618\,x^2 + 1.002084\,x + 1\,. \end{aligned}$$

Na osnovu (4) imamo

$$|f(x) - P_3(x)| \le \frac{M}{4!}\,|\,x\,(x - 0.2)\,(x - 0.5)\,(x - 0.4)\,| \qquad (0 \le x \le 0.5)\,,$$

gde je $M$ definisano u (8).

Na primer, za $x = 0.3$ je

$$|f(0.3) - P_2(0.3)| = 0.001288$$

i

$$|f(0.3) - P_3(0.3)| = 0.000033\,.$$

**6.1.5.** Koristeći Lagrangeov interpolacioni polinom $n$-tog stepena funkcije $f$, izvesti odgovarajući Newtonov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama.

**Rešenje.** Označimo sa $P_n^L(x)$ Lagrangeov interpolacioni polinom $n$-tog stepena funkcije $f$. Tada je

$$\begin{aligned} f(x) - P_n^L(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \left[ \frac{f(x)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x - x_k)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} \right]. \end{aligned}$$

Kako je (videti [2, str. 24])

$$[x_0, x_1, \ \ldots \ , x_r; f] = \sum_{i=0}^{r} \frac{f(x_i)}{\omega_r'(x_i)}, \quad r \in \mathbb{N},$$

gde je

$$\omega_r(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ \ldots \ (x - x_r) \quad \text{i} \quad \omega_r'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{r} (x_i - x_j),$$

zaključujemo da važi

(1) $$f(x) - P_n^L(x) = \omega_n(x)[x_0, x_1, \ \ldots \ , x_n, x; f].$$

S druge strane je

(2) $$P_n^L(x) = P_0^L(x) + (P_1^L(x) - P_0^L(x)) + \ \ldots \ + (P_n^L(x) - P_{n-1}^L(x)).$$

Dalje imamo

$$P_k^L(x) - P_{k-1}^L(x) = A_k \omega_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ \ldots \ , n,$$

jer je $P_k^L(x) - P_{k-1}^L(x)$ polinom $k$-tog stepena sa nulama $x_0, \ \ldots \ , x_{k-1}$.

Kako je $f(x_k) = P_k^L(x_k)$, to na osnovu prethodnog važi

$$f(x_k) - P_{k-1}^L(x_k) = A_k \omega_{k-1}(x_k),$$

dok je iz (1) za $x = x_k$ i $n = k - 1$,

$$f(x_k) - P_{k-1}^L(x_k) = \omega_{k-1}(x_k)[x_0, \ \ldots \ , x_{k-1}, x_k; f].$$

Upoređujući dve poslednje relacije dobijamo da je

$$A_k = [x_0, x_1, \ \ldots \ , x_k; f] \quad \text{i} \quad P_k^L(x) - P_{k-1}^L(x) = [x_0, \ \ldots \ , x_k; f]\, \omega_{k-1}(x).$$

Najzad, zamenjući poslednji izraz u (2) dobijamo Newtonov interpolacioni polinom sa podeljenjim razlikama:

$$\begin{aligned} P_n^N(x) &= f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f] \\ &\quad + \ \cdots \ + (x - x_0)(x - x_1) \ \cdots \ (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \ \ldots \ , x_n; f]. \end{aligned}$$

**6.1.6.** Na osnovu tabele vrednosti funkcije $x \mapsto f(x) = \log x$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0.40 | 0.50 | 0.70 | 0.80 |
| $f(x_k)$ | $-0.916291$ | $-0.693147$ | $-0.356675$ | $-0.223144$ |

Lagrangeovom interpolacijom naći približno $\log 0.6$ i odgovarajuću grešku u aproksimaciji.

**Rešenje.** Neka je $\omega(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$, gde su $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.7$, $x_3 = 0.8$. Za $x = 0.6$ i $k = 0, 1, 2, 3$,

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'\,(x_k)}$$

ima sledeće vrednosti

$$L_0(0.6) = -\frac{1}{6}\,, \quad L_1(0.6) = L_2(0.6) = \frac{2}{3}\,, \quad L_3(0.6) = -\frac{1}{6}\,.$$

Tada imamo

$$\log 0.6 \cong -\frac{1}{6}(-0.916291) + \frac{2}{3}(-0.693147) + \frac{2}{3}(-0.356675) - \frac{1}{6}(-0.223144),$$

tj.

$$\log 0.6 \cong -0.509975\,.$$

Kako je

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}\,, \quad \omega(0.6) = (0.2)(0.1)(-0.1)(-0.2) = 4 \cdot 10^{-4}$$

i

$$M = \max_{x \in [0.4, 0.8]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{6}{(0.4)^4} \cong 234.4\,,$$

važi sledeća ocena greške

$$|\log 0.6 - (-0.509975)| \le \frac{1}{4!} M\,\omega(0.6) \cong 3.9 \cdot 10^{-3}\,.$$

Primetimo da je stvarna greška manja. Naime, kako je tačna vrednost $\log 0.6 = -0510825623\ldots$, stvarna greška učinjena u interpolaciji je $-8.506 \cdot 10^{-4}$.

**6.1.7.** Odrediti približno $f(1)$ na osnovu sledećih podataka

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | $-1$ | 0 | 2 | 3 |
| $f(x_k)$ | $-3$ | 1 | 3 | 13 |

primenom Aitkenove šeme.

**Rešenje.** Kada nije potreban opšti izraz za interpolacioni polinom $P_n(x)$, koji je odrediv na osnovu podataka $(x_k,\ f(x_k))$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, već samo vrednost za neko konkretno $x$, koristi se Aitkenova šema, koja se sastoji u sukscesivnoj primeni sledećih izraza

$$A_k = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,;$$

$$A_{k-1,k} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{vmatrix} A_{k-1} & x_{k-1} - x \\ A_k & x_k - x \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, n)\,;$$

$$\vdots$$

$$A_{0,1,\ldots,n} = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} A_{0,1,\ldots,n-1} & x_0 - x \\ A_{1,2,\ldots,n} & x_n - x \end{vmatrix},$$

pri čemu je

$$P_n(x) = A_{0,1,\ldots,n}\,.$$

Dakle, na osnovu podataka datih u zadatku, primenom Aitkenove šeme, imamo redom

$$A_{0,1} = \frac{1}{0 - (-1)} \begin{vmatrix} -3 & -1 - 1 \\ 1 & 0 - 1 \end{vmatrix} = 5\,,$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{2 - 0} \begin{vmatrix} 1 & 0 - 1 \\ 3 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 2\,,$$

$$A_{2,3} = \frac{1}{3-2}\begin{vmatrix} 3 & 2-1 \\ 13 & 3-1 \end{vmatrix} = -7\,,$$

$$A_{0,1,2} = \frac{1}{2-(-1)}\begin{vmatrix} 5 & -1-1 \\ 2 & 2-1 \end{vmatrix} = 3\,,$$

$$A_{1,2,3} = \frac{1}{3-0}\begin{vmatrix} 2 & 0-1 \\ -7 & 3-1 \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$A_{0,1,2,3} = \frac{1}{3-(-1)}\begin{vmatrix} 3 & -1-1 \\ -1 & 3-1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Dakle, $f(1) \cong A_{0,1,2,3} = 1$.

**6.1.8.** Za funkciju $x \mapsto f(x)$ zadatu skupom podataka

| $x$ | 14 | 17 | 31 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 68.7 | 64.0 | 44.0 | 39.1 |

bez konstrukcije interpolacionog polinoma, približno odrediti $f^{-1}(54.0)$.

**Rešenje.** Tablica za inverznu funkciju je

| $y$ | 68.7 | 64.0 | 44.0 | 39.1 |
|---|---|---|---|---|
| $f^{-1}(y)$ | 14 | 17 | 31 | 35 |

Zadatak rešavamo primenom Aitkenove šeme.

Polazeći od $A_k = f^{-1}(y_k)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, imamo

$$A_0 = 14, \quad A_1 = 17, \quad A_2 = 31, \quad A_3 = 35,$$

a na osnovu

$$A_{k-1,k} = \frac{1}{y_k - y_{k-1}}\begin{vmatrix} A_{k-1} & y_{k-1} - y \\ A_k & y_k - y \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

uzimajući za $y = 54$, dobijamo

$$A_{0,1} = 23.383, \quad A_{1,2} = 24, \quad A_{2,3} = 22.837.$$

S obzirom da je

$$A_{k-1,k,k+1} = \frac{1}{y_{k+1} - y_{k-1}} \begin{vmatrix} A_{k-1,k} & y_{k-1} - y \\ A_{k,k+1} & y_{k+1} - y \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2),$$

dobijamo

$$A_{0,1,2} = 23.75, \quad A_{1,2,3} = 23.533.$$

Najzad, imamo

$$A_{0,1,2,3} = \frac{1}{y_3 - y_0} \begin{vmatrix} A_{0,1,2} & y_0 - y \\ A_{1,2,3} & y_3 - y \end{vmatrix} = 23.642.$$

Prema tome, $f^{-1}(54.0) \cong 23.6$.

**6.1.9.** Na osnovu tri vrednosti funkcije $f(x):\ f(a),\ f(b),\ f(c)$ u blizini njenog maksimuma ili minimuma, naći približno vrednost $x$ za koju funkcija ima tu ekstremnu vrednost.

**Rešenje.** Na osnovu vrednosti funkcije u blizini ekstremuma formiramo Lagrangeov interpolacioni polinom drugog stepena

$$P_2(x) = f(a)\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\,\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

i tražimo tačku u kojoj on ima ekstremnu vrednost. Imamo redom

$$\begin{aligned} \frac{dP_2(x)}{dx} &= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}\,[(x-c)+(x-b)] + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}\,[(x-c)+(x-a)] \\ &\quad + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\,[(x-b)+(x-a)] = 0\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 2x&\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right] \\ &= \frac{(b+c)\,f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c+a)\,f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a+b)\,f(c)}{(c-a)(c-b)}\,. \end{aligned}$$

Rešavanjem poslednje jednačine dobijamo traženu vrednost za $x$:

$$x = \frac{\left(b^2-c^2\right)f(a) + \left(c^2-a^2\right)f(b) + \left(a^2-b^2\right)f(c)}{2\,[(b-c)\,f(a) + (c-a)\,f(b) + (a-b)\,f(c)]}\,.$$

**6.1.10.** Neka su $(a, A)$, $(b, B)$, $(c, C)$ tri tačke krive $x \mapsto f(x)$ u blizini njene nule. Metodom inverzne interpolacije, približno odrediti koren jednačine $f(x) = 0$. Na osnovu tog rezultata, konstruisati iterativni proces za rešavanje jednačine $f(x) = 0$.

**Rešenje.** Ako smatramo da je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ monotona na segmentu $[\alpha, \beta]$ koji sadrži njenu nulu i $a, b, c \in [\alpha, \beta]$, tada, za taj segment, postoji inverzna funkcija $y \mapsto f^{-1}(y)$.

Lagrangeov interpolacioni polinom za funkciju $y \mapsto f^{-1}(y)$, konstruisan na osnovu podataka

| $y_k$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $f^{-1}(y_k)$ | $a$ | $b$ | $c$ |

je dat sa

$$x = a\,\frac{(y-B)(y-C)}{(A-B)(A-C)} + b\,\frac{(y-C)(y-A)}{(B-C)(B-A)} + c\,\frac{(y-A)(y-B)}{(C-A)(C-B)}\,.$$

Vrednost $x$, u oznaci $d$, za koju je $y = 0$, je data sa

$$d = \frac{aBC}{(A-B)(A-C)} + \frac{bCA}{(B-C)(B-A)} + \frac{cAB}{(C-A)(C-B)}\,. \tag{1}$$

Neka je $\xi$ koren jednačine $f(x) = 0$ i neka su $a = \xi + \alpha$, $b = \xi + \beta$, $c = \xi + \gamma$ aproksimacije tog korena. Ako stavimo da je $d = \xi + \delta$, na osnovu (1) dobijamo

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\alpha BC}{(A-B)(A-C)} + \frac{\beta CA}{(B-C)(B-A)} + \frac{\gamma AB}{(C-A)(C-B)}\\ &= \alpha\beta\gamma(P - Q + P^2)\left(1 + o\left(\alpha\beta\gamma\right)\right)\,,\end{aligned}$$

gde je $P = f''(\xi)/2f'(\xi)$, $Q = f'''(\xi)/6f'(\xi)$ $\;(f \in C^3\,[\alpha, \beta])$. Dakle,

$$\delta \sim K\alpha\beta\gamma\,, \tag{2}$$

gde je $K$ konstanta.

a) Formula (1) sugeriše konstrukciju tro-tačkastog iterativnog procesa ako uzmemo $a = x_{n-2}$, $b = x_{n-1}$, $c = x_n$, $d = x_{n+1}$, tj.

$$\begin{aligned}x_{n+1} = {} & \frac{x_{n-2}\,y_{n-1}\,y_n}{(y_{n-2} - y_{n-1})(y_{n-2} - y_n)} + \frac{x_{n-1}\,y_{n-2}\,y_n}{(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} - y_{n-2})}\\ & + \frac{x_n\,y_{n-2}\,y_{n-1}}{(y_n - y_{n-1})(y_n - y_{n-2})}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Ako stavimo $x_n = \xi + e_n$, tada na osnovu (2) imamo

$$e_{n+1} \sim K\, e_n\, e_{n-1}\, e_{n-2}\,,$$

odakle nalazimo da je

$$e_{n+1} \sim L\, e_n^{1.839}\,,$$

gde je $L$ konstanta.

Indeks efikasnosti (videti (6) iz zadatka 5.1.20) iterativnog procesa (3) je

$$^{+}\mathrm{EFF} = 1.839\,.$$

b) Uzmimo sada da je $a = x_{n-1},\ b = x_n,\ d = x_{n+1}$ i $c = x_n^*$, gde je $x_n^*$ neka funkcija od $x_{n-1}$ i $x_n$. Dobijamo iterativni proces

$$\begin{aligned} x_{n+1} = {} & \frac{x_n^*\, y_{n-1}\, y_n}{(y_n^* - y_n)\,(y_n^* - y_{n-1})} + \frac{x_{n-1}\, y_n^*\, y_n}{(y_{n-1} - y_n)\,(y_{n-1} - y_n^*)} \\ & + \frac{x_n\, y_n^*\, y_{n-1}}{(y_n - y_{n-1})\,(y_n - y_n^*)}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

za koji, s obzirom na (2), važi

$$e_{n+1} \sim K\, e_n\, e_{n-1}\, e_n^*\,, \tag{5}$$

pri čemu su korišćene prethodno uvedene oznake. Od mnogih mogućnosti izbora tačke $x_n^*$, razmotrićemo samo neke.

Ako uzmemo da je

$$x_n^* = \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1})\,,$$

na osnovu (5), dobijamo

$$e_{n+1} \sim K\, e_n\, e_{n-1} \cdot \frac{1}{2}\,(e_n + e_{n-1}) \sim L\, e_n\, e_{n-1}^2\,, \tag{6}$$

s obzirom da je $e_n$ zanemarljivo u poređenju sa $e_{n-1}$. Odredimo red konvergencije $r$ ovakvog iterativnog procesa. S obzirom da je

$$e_{n+1} \sim M\, e_n^r\,,$$

na osnovu (6) dobijamo

$$e_n \sim L^{1/r}\, e_{n-1}^{(r+2)/r}\,,$$

tj. $r = 1 + \dfrac{2}{r}$, odakle je $r = 2$. Dakle, imamo

$$e_{n+1} \sim M\, e_n^2\,,$$

a indeks efikasnosti ovog iterativnog procesa je

$$^{+}\mathrm{EFF} = 2^{1/2} \cong 1.414\,,$$

s obzirom da zahteva izračunavanje $y_n$ i $y_n^*$ po iterativnom koraku.

Opštije, $x_n^*$ u (4) možemo uzeti kao linearnu kombinaciju od $x_n$ i $x_{n-1}$ sa parametrom $g$, tj. $x_n^* = g\,x_n + (1-g)\,x_{n-1}$, $g \neq 1$. Za $g = 1$, $x_n^* = x_n$, na osnovu (4) imamo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}\,y_n^2}{(y_{n-1}-y_n)^2} + \lim_{x_n^*\to x_n}\left\{\frac{y_{n-1}}{y_n^*-y_n}\left(\frac{x_n^*\,y_n}{y_n^*-y_{n-1}} - \frac{x_n\,y_n^*}{y_n^*-y_{n-1}}\right)\right\} \\ &= \frac{x_{n-1}\,y_n^2}{(y_{n-1}-y_n)^2} + \lim_{x_n^*\to x_n}\left\{\frac{y_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\left(\frac{x_n^*\,y_n - x_n\,y_n^*}{y_n^*-y_n} - \frac{x_n^*\,y_n}{y_n^*-y_{n-1}}\right)\right\} \\ &= \frac{y_n\,(x_{n-1}\,y_n-x_n\,y_{n-1})}{(y_n-y_{n-1})^2} + \frac{y_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\left(\frac{y_n-x_n\,y_n'}{y_n'}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Geometrijski, $x_{n+1}$ predstavlja nulu parabole koja prolazi kroz tačku sa koordinatama $(y_{n-1},\, x_{n-1})$ i tangira krivu $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ u tački $(y_n, x_n)$. Na osnovu (5), za iterativni proces (7), važi

$$e_{n+1} \sim K\, e_n^2\, e_{n-1}\,,$$

pa ako stavimo $e_{n+1} \sim L\, e_n^r$, tada je $r = 2 + \dfrac{1}{r}$ i $r = 1 + \sqrt{2}$, tj.

$$e_{n+1} \sim L\, e^{2.414}\,.$$

Indeks efikasnosti ovog procesa je

$$^{+}\mathrm{EFF} = (2.414)^{1/2} \cong 1.554$$

s obzirom da zahteva vrednosti $y_n$ i $y_n'$ po iterativnom koraku.

Na kraju, uzmimo da je $x_n^*$ u (4) određeno metodom sečice, tj.

$$x_n^* = \frac{x_{n-1}\,y_n - x_n\,y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\,,$$

pri čemu je

$$e_n^* \sim L\, e_n\, e_{n-1}$$

(videti [1, str. 347–348]). Za takav metod je, dakle, na osnovu (5),

$$e_{n+1} \sim K\, e_n\, e_{n-1}\, L\, e_n\, e_{n-1} \sim M\, e_n^2\, e_{n-1}^2 \,.$$

Ako stavimo da je $e_{n+1} \sim N\, e_n^r$, poznatim postupkom dobijamo $r = 2 + \dfrac{2}{r}$, odakle je $r = 1 + \sqrt{3}$, tj.

$$e_{n+1} \sim N\, e_n^{2.732} \,.$$

Indeks efikasnosti ovog procesa je

$$^{+}\mathrm{EFF} = (2.732)^{1/2} \cong 1.653 \,,$$

s obzirom da zahteva vrednosti $y_n$ i $y_n^*$ po iterativnom koraku.

*Literatura:*

L. G. Chambers: *A quadratic formula for finding the root of an equation.* Math. Comp. **25**(114) (1971), 305–307.

M. G. Cox: *A note on Chambers' method for finding a zero of a function.* Math. Comp. **26**(119) (1972), 749–750.

J. A. Blackburn, Y. Beaudoin: *A note on Chambers' method.* Math. Comp. **28**(126) (1974), 573–574.

**6.1.11.** Neka su $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n$ realni brojevi različiti od 0 i $-1$, i međusobno različiti. Ako je $\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, dokazati

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \omega\,(1/x_k)}{\omega'(x_k)(1 + x_k)} = (-1)^{n-1}(1 - x_1 x_2 \ \cdots \ x_n).$$

**Rešenje.** Korišćenjem Lagrangeove interpolacije u tačkama $x_1, \ldots, x_n$, polinom $x \mapsto p(x)$, stepena ne većeg od $n-1$, se može predstaviti u obliku

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\, p(x_k) \,. \tag{1}$$

Lako se može pokazati da je takav i polinom

$$p(x) = x^n \omega\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \ \cdots \ x_n \omega(x).$$

Naime, važi

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^n \left(\frac{1}{x} - x_1\right) \cdots \left(\frac{1}{x} - x_n\right) \\
&\quad + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \cdots x_n (x - x_1) \cdots (x - x_n) \\
&= (1 - x_1 x) \cdots (1 - x_n x) + (-1)^{n-1} x_1 \cdots x_n (x - x_1) \cdots (x - x_n) \\
&= (-1)^n x_1 \cdots x_n x^n + \cdots + (-1)^{n-1} x_1 \cdots x_n x^n + \ldots ,
\end{aligned}
$$

pa je, dakle, to polinom stepena ne većeg od $n-1$.

S obzirom da je $\omega(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, sada na osnovu (1) imamo

$$
p(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \, x_k^n \omega\left(\frac{1}{x_k}\right) .
$$

Uzimajući u poslednjoj jednakosti $x = -1$ i imajući u vidu da je

$$
\begin{aligned}
p(-1) &= (-1)^n (-1 - x_1) \cdots (-1 - x_n) \\
&\quad + (-1)^{n-1} x_1 \cdots x_n (-1 - x_1) \cdots (-1 - x_n) \\
&= (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) - x_1 \cdots x_n (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \\
&= (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)[1 - x_1 x_2 \cdots x_n]
\end{aligned}
$$

i

$$
\omega(-1) = (-1)^n (1 + x_1) \cdots (1 + x_n),
$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
(1 + x_1) \cdots (1 + x_n)(1 - x_1 x_2 \cdots x_n) &= (-1)^{n-1} (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \omega\,(1/x_k)}{(1 + x_k)\omega'(x_k)},
\end{aligned}
$$

odakle, s obzirom da je $x_i \neq -1$ $(i = 1, \ldots, n)$, sleduje

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \omega\,(1/x_k)}{\omega'(x_k)(1 + x_k)} = (-1)^{n-1} (1 - x_1 x_2 \cdots x_n).
$$

**6.1.12.** Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ proizvoljni celi brojevi i neka $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Pokazati da svaki algebarski polinom

$$
f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n
$$

zadovoljava uslov

$$\max_{0\le i\le n} |f(x_i)| \ge \frac{n!}{2^n}\,.$$

**Rešenje.** Neka je

$$\omega(x) = (x - x_0)\ \cdots\ (x - x_n).$$

Polinom $f(x)$ je $n$-tog stepena pa se može zapisati u obliku Lagrangeovog polinoma $n$-tog stepena

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k).$$

Upoređujući koeficijente leve i desne strane uz $x^n$ dobijamo

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Neka je

$$M = \max_{0\le i\le n} |f(x_i)|.$$

Tada je

$$1 \le M \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|\omega'(x_k)|}.$$

S druge strane

$$\begin{aligned} |\omega'(x_k)| &= |x_k - x_0||x_k - x_1|\ \cdots\ |x_k - x_{k-1}||x_k - x_{k+1}|\ \cdots\ |x_k - x_n| \\ &\ge k!(n-k)!, \end{aligned}$$

pa je

$$1 \le M \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!}.$$

Najzad, imamo

$$M \ge \frac{1}{\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{1}{\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} = \frac{n!}{2^n},$$

tj.

$$\max_{0\le i\le n} |f(x_i)| \ge \frac{n!}{2^n}\,.$$

**6.1.13.** Korišćenjem Lagrangeove interpolacije dokazati:

$$\text{a)}\qquad \frac{1}{m-n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\binom{m}{n}\binom{n}{k}}{m-k},\qquad m>n;$$

$$\text{b)}\qquad \frac{m}{m-n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k}{m-k}\binom{m}{n}\binom{n}{k},\qquad m>n.$$

**Rešenje.** a) Lagrangeov interpolacioni polinom za funkciju $f(x)=1$, u čvorovima $x_i=i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, je dat sa

$$\begin{aligned} P_n^L(x)&=\omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)(x-x_i)}\\ &=x(x-1)\ \cdots\ (x-n)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\omega'(i)(x-i)}\\ &=\frac{x(x-1)\ \cdots\ (x-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\binom{n}{i}}{x-i}, \end{aligned}$$

gde smo koristili $\omega(x)=(x-0)(x-1)\ \cdots\ (x-n)$ i

$$\omega'(i)=i(i-1)\ \cdots\ 2\cdot 1\cdot(-1)\ \cdots\ (i-n)=(-1)^{n-i}i!(n-i)!\,.$$

Za $x=m$ $(m>n)$ i imajući u vidu da je $1=P_n^L(x)$, dobijamo

$$1=\frac{m(m-1)\ \cdots\ (m-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\binom{n}{i}}{m-i},$$

tj.

$$\frac{1}{m-n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\binom{n}{i}}{m-i}=\binom{m}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\binom{n}{i}}{m-i}.$$

b) Postupak je sličan kao u slučaju pod a), samo ovde biramo $f(x)=x$.

**6.1.14.** Dokazati da je

$$(x_0-x)^k p_0(x)+(x_1-x)^k p_1(x)+\ \cdots\ +(x_n-x)p_n(x)=0$$

za $k = 1, \ldots, n$, gde je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, a

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

**Rešenje.** Neka je $f(z) = (z - x)^k$, $k = 1, \ldots, n$, tada

$$f(x_i) = (x_i - x)^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Lagrangeov polinom za funkciju $f(z)$ je:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k p_i(z),$$

i to za svako $z \in \mathbb{R}$ (s obzirom da je $f$ polinom stepena $k \le n$). Zamenom $z = x$ iz poslednje formule dobijamo

$$f(x) = 0 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k p_i(x).$$

**6.1.15.** Odrediti čvorove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (različiti realni ili kompleksni brojevi) tako da pri zadatom $a$, vrednost izraza

$$M = M(a) = \max_{k=1,\ldots,n} |p_k(a)|,$$

za

$$p_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \quad \omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

bude najmanja.

**Rešenje.** S obzirom da je

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(a) = 1,$$

zaključujemo da je $M \ge 1/n$. Dalje, ako postoje čvorovi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje važi

$$p_k(a) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

tada je $M = 1/n$ najmanje moguće.

Dakle, pretpostavimo da je

$$p_k(a) = \frac{\omega(a)}{\omega'(x_k)(a - x_k)} = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Odavde imamo

$$(x_k - a)\omega'(x_k) + n\omega(a) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Znači, polinom

$$(x - a)\omega'(x) + n\omega(a)$$

ima iste nule kao i polinom $\omega(x)$, pa zato važi:

$$(x - a)\omega'(x) + n\omega(a) = C \cdot \omega(x), \quad C = \text{const}.$$

Za $x = a$ imamo $C = n$ pa je

$$(x - a)\omega'(x) + n\omega(a) - n\omega(x) = 0.$$

Stavljajući da je

$$\omega(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i (x - a)^i,$$

dobijamo

$$(x - a)\sum_{i=1}^{n} C_i (x - a)^{i-1} \cdot i + nC_0 - n\sum_{i=0}^{n} C_i (x - a)^i = 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (x - a)^i (i - n) = 0 \implies C_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n - 1,$$

pa je

$$\omega(x) = C_0 + C_n (x - a)^n \quad (C_0, C_n \neq 0).$$

Dakle, za različite vrednosti konstanti $C_0$ i $C_n$ imamo različita rešenja za tražene čvorove, ali za svaki izbor $C_0, C_n (\neq 0)$ čvorovi su u temenima pravilnog poligona od $n$ strana sa centrom opisanog kruga u tački $a$ i poluprečnikom $\sqrt[n]{|C_0/C_n|}$.

**6.1.16.** Odrediti korak $h$ tako da interpolacioni polinom $x \mapsto P_3(x)$, koji ima ekvidistantne čvorove interpolacije $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, 3$) i $x_0 \geq 1$, aproksimira funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ na segmentu $[x_0, x_0 + 3h]$ sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

**Rešenje.** Ako uvedemo smenu $t = (x - x_0)/h$, tada iz $x \in [x_0, x_0 + 3h]$ sleduje da $t \in [0, 3]$ i da važi

$$|f(x) - P_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3) \right| h^4 < \varepsilon \quad (1 \le x_0 < \xi < x_0 + 3h).$$

S obzirom da je

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}},$$
$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}},$$

i

$$|f^{(4)}(x)| = \left| \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}} \right| = \left| -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}} \right| \le \frac{15}{16}, \quad x \ge 1,$$

dobijamo

$$|R_3| \le \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} h^4 \cdot \max_{t \in [0,3]} |t(t-1)(t-2)(t-3)| < \varepsilon.$$

Iz poslednje nejednakosti sleduje

$$h^4 < \frac{24 \cdot 16 \cdot \varepsilon}{15 \cdot \max\limits_{t \in [0,3]} |t(t-1)(t-2)(t-3)|},$$

tj.

$$h < \left( \frac{128\varepsilon}{5 \cdot \max\limits_{t \in [0,3]} |t(t-1)(t-2)(t-3)|} \right)^{1/4}.$$

Nije teško zaključiti da su ekstremne vrednosti funkcije

$$g(t) = t(t-1)(t-2)(t-3), \quad t \in [0, 3],$$

$$g_{\min} = g\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = -1, \quad g_{\max} = g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16},$$

pa je

$$\max_{t \in [0,3]} |t(t-1)(t-2)(t-3)| = 1.$$

Nazad imamo

$$h < \left( \frac{0.5 \cdot 10^{-5} \cdot 128}{5} \right)^{\frac{1}{4}} = 0.10637.$$

**6.1.17.** Odrediti

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^\circ$ | $\Delta\,(a\,f(x)+b\,g(x))\,,$ | $4^\circ$ | $\Delta\,\dfrac{f(x)}{g(x)}\,,$ |
| $2^\circ$ | $\Delta\,\big(ax^2+bx+c\big)\,,$ | $5^\circ$ | $\Delta\,\sin\,(ax+b)\,,$ |
| $3^\circ$ | $\Delta\,\,(f(x)\,g(x))\,,$ | $6^\circ$ | $\Delta\,\log x\,.$ |

**Rešenje.** $1^\circ$ $\quad \Delta\,(a\,f(x)+b\,g(x)) = a\,\Delta f(x) + b\,\Delta g(x)\,.$

$2^\circ$
$$\begin{aligned}\Delta\,\Big(ax^2+bx+c\Big) &= a\,\Delta x^2 + b\,\Delta x + c\,\Delta 1\\ &= a\Big((x+h)^2 - x^2\Big) + b\,((x+h)-x) + c(1-1)\\ &= 2ahx + ah^2 + bh\,.\end{aligned}$$

$3^\circ$
$$\begin{aligned}\Delta\,(f(x)\,g(x)) &= f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)\\ &= f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x)\\ &\quad + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)\\ &= f(x+h)\,\Delta\,g(x) + g(x)\,\Delta\,f(x)\end{aligned}$$

ili

$$\Delta\,(f(x)\,g(x)) = f(x)\,\Delta\,g(x) + g(x+h)\,\Delta\,f(x)\,.$$

$4^\circ$
$$\begin{aligned}\Delta\,\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h) + (f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x))}{g(x)\,g(x+h)}\\ &= \frac{g(x)\,\Delta\,f(x) - f(x)\,\Delta g(x)}{g(x)\,g(x+h)}\end{aligned}$$

$5^\circ$
$$\begin{aligned}\Delta\,\sin(ax+b) &= \sin\,(a(x+h)+b) - \sin(ax+b)\\ &= 2\sin\frac{ah}{2}\cos\Big(a+\Big(x+\frac{h}{2}\Big)+b\Big)\end{aligned}$$

$6^\circ$
$$\Delta\,\log x = \log(x+h) - \log x = \log\Big(1+\frac{h}{x}\Big)\,.$$

**6.1.18.** Dokazati da su operatori $A$, $B$, $C$, definisani sa

$$A = \Delta\Big(1+\frac{1}{2}\,\Delta\Big)\,(1+\Delta)^{-1}\,,\quad B = \nabla\Big(1-\frac{1}{2}\,\nabla\Big)\,(1-\nabla)^{-1}\,,\quad C = \mu\delta\,,$$

ekvivalentni, razvijajući ih po stepenima operatora pomeranja $E$. Na osnovu prethodnog, naći razvoj operatora $C$ po stepenima operatora prednje razlike $\Delta$ i po stepenima operatora zadnje razlike $\nabla$.

**Rešenje.** Imajući u vidu da se nad ovim, takozvanim operatorima konačne razlike ili diferencnim operatorima $\{E,\ \Delta,\ \nabla,\ \delta,\ \mu,\ 1,\ D,\ J\}$ (videti [2, str. 27–32]), sprovodi formalan račun, zasnovan na pravilima algebre i analize, imamo

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= Ef(x) - 1f(x) \\ &= (E-1)f(x) \\ \Longrightarrow \qquad \Delta &= E - 1, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \nabla f(x) &= f(x) - f(x-h) \\ &= 1f(x) - E^{-1}f(x) \\ &= \left(1 - E^{-1}\right) f(x) \\ \Longrightarrow \qquad \nabla &= 1 - E^{-1}. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(E-1)(E+1)\,E^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\big(E^2-1\big)E^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\big(E-E^{-1}\big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\big(1-E^{-1}\big)\big(1+E^{-1}\big)\big(E^{-1}\big)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\big(1-E^{-2}\big)E \\ &= \frac{1}{2}\big(E-E^{-1}\big), \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $A = B$.

Kako je

$$\begin{aligned} \mu f(x) &= \frac{1}{2}\left(f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(E^{1/2}f(x) + E^{-1/2}f(x)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(E^{1/2} + E^{-1/2}\big)f(x) \\ \Longrightarrow \qquad \mu &= \frac{1}{2}\big(E^{1/2} + E^{-1/2}\big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \delta f(x) &= f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \\ &= E^{1/2}f(x) - E^{-1/2}f(x) \\ &= \big(E^{1/2} - E^{-1/2}\big)f(x) \\ \Longrightarrow \qquad \delta &= E^{1/2} - E^{-1/2}, \end{aligned}$$

imamo

$$C = \mu\delta = \frac{1}{2}\big(E^{1/2} + E^{-1/2}\big)\big(E^{1/2} - E^{-1/2}\big) = \frac{1}{2}\big(E - E^{-1}\big),$$

pa je, dakle, $A = B = C$.

S obzirom da je

$$(1+\Delta)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Delta^k,$$

imamo

$$
\begin{aligned}
C = A &= \Big(\Delta + \frac{1}{2}\,\Delta^2\Big)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Delta^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Delta^{k+1} + \frac{1}{2}\,\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Delta^{k+2} \\
&= \Delta + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\Delta^{k+1}\Big(1-\frac{1}{2}\Big) \\
&= \Delta + \frac{1}{2}\,\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\Delta^{k+1}\,.
\end{aligned}
$$

Slično, imajući u vidu da je

$$
(1-\nabla)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\nabla^k\,,
$$

imamo

$$
\begin{aligned}
C = B &= \Big(\nabla - \frac{1}{2}\,\nabla^2\Big)\sum_{k=0}^{+\infty}\nabla^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\nabla^{k+1} - \frac{1}{2}\,\sum_{k=0}^{+\infty}\nabla^{k+2} \\
&= \nabla + \sum_{k=1}^{+\infty}\nabla^{k+1}\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = \nabla + \frac{1}{2}\,\sum_{k=1}^{+\infty}\nabla^{k+1}\,.
\end{aligned}
$$

**6.1.19.** Naći razvoj operatora diferenciranja $D$ po stepenima operatora centralne razlike $\delta$.

**Rešenje.** Kako je

$$
\begin{aligned}
\delta f(x) &= f\Big(x+\frac{h}{2}\Big) - f\Big(x-\frac{h}{2}\Big) = E^{1/2}f(x) - E^{-1/2}f(x) \\
&= \big(E^{1/2} - E^{-1/2}\big)f(x)\,,
\end{aligned}
$$

to je

$$
\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}\,. \tag{1}
$$

Ako pretpostavimo da je funkcija $f$ proizvoljan broj puta diferencijabilna, imamo

$$\begin{aligned} Ef(x) = f(x+h) &= f(x) + \frac{h}{1!}\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \cdots\right) f(x) \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da važi

$$E = e^{hD}\,. \tag{2}$$

Na osnovu (1) i (2), imamo

$$\delta = e^{hD/2} - e^{-hD/2} = 2\sinh\frac{hD}{2}\,.$$

Kako je

$$\cosh\frac{hD}{2} = \sqrt{1 + \left(\sinh\frac{hD}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\,,$$

to je

$$\frac{hD}{2} = \log\left(\sinh\frac{hD}{2} + \cosh\frac{hD}{2}\right) = \log\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\,\right),$$

tj.

$$D = \frac{2}{h}\log\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\,\right). \tag{3}$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) = \log\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\,\bigr)\,.$$

S obzirom da je

$$g'(x) = \bigl(1+x^2\bigr)^{-1/2}\,,$$

posle razvoja u binomni red, dobijamo

$$g'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k}\,.$$

Kako je

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-k+1)}{k!} = \frac{(-1)(-3)\cdots(-(2k-1))}{2^k\,k!}$$
$$= \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

to je

$$g'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\, x^{2k}.$$

Integracijom od 0 do $x$, dobijamo

$$g(x) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)}\, x^{2k+1}.$$

Dakle,

$$g\left(\frac{\delta}{2}\right) = \log\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\,\right) = \frac{\delta}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)2^{2k+1}}\,\delta^{2k+1},$$

pa je, na osnovu (3),

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)2^{2k}}\,\delta^{2k+1}\right)$$

ili

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{[(2k-1)!!]^2}{2^{2k}(2k+1)!}\,\delta^{2k+1}\right),$$

tj.

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1^2}{2^2\cdot 3!}\,\delta^3 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}\,\delta^5 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^6\cdot 7!}\,\delta^7 + \cdots\right).$$

**6.1.20.** Ako je $\mu$ operator usrednjavanja, $\delta$ operator centralne razlike i $D$ operator diferenciranja, odrediti stepeni red po $\delta$, tj. $S(\delta)$, u razvoju $D = \dfrac{\mu}{h}\,S(\delta)$ $(h = \text{const} > 0)$.

**Rešenje.** S obzirom da smo u zadatku 6.1.18 pokazali da važi

$$\mu = \frac{1}{2}\big(E^{1/2} + E^{-1/2}\big),$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}\,, \tag{1}$$

gde je $E$ operator pomeranja, imamo

$$\mu = \frac{1}{2}\big(E^{1/2} + E^{-1/2}\big) = E^{1/2} - \frac{1}{2}\big(E^{1/2} - E^{-1/2}\big) = E^{1/2} - \frac{1}{2}\,\delta\,. \tag{2}$$

Ako (1) pomnožimo sa $E^{1/2}$, dobijamo

$$E - \delta E^{1/2} - 1 = 0\,,$$

odakle je

$$E^{1/2} = \frac{1}{2}\,\delta + \left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{1/2}\,.$$

Tada, na osnovu (2), zaključujemo da je

$$\mu = \left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{1/2}\,. \tag{3}$$

Na osnovu jednakosti (3) iz zadatka 6.1.19 imamo

$$D = \frac{2}{h}\log\left(\frac{\delta}{2} + \left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{1/2}\right)\,,$$

ili, uz korišćenje prethodno dokazane jednakosti (3),

$$D = \frac{2}{h}\,\mu\left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{-1/2}\log\left(\frac{\delta}{2} + \left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{1/2}\right)\,. \tag{4}$$

S obzirom da važi

$$\left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!\,2^{2k}}\,\delta^{2k}\,,$$

$$\log\left(\frac{\delta}{2} + \left(1 + \frac{1}{4}\,\delta^2\right)^{1/2}\right) = \frac{\delta}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)\,2^{2k+1}}\,\delta^{2k+1}$$

(videti zadatak 6.1.20), na osnovu (4) najzad dobijamo

$$D = \frac{\mu}{h}\left(\delta - \frac{1^2}{3!}\,\delta^3 + \frac{1^2\cdot 2^2}{5!}\,\delta^5 - \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{7!}\,\delta^7 + \cdots\right)\,. \tag{5}$$

**6.1.21.** Operator $A = (1+E)J$ razviti po stepenima operatora prednje razlike $\Delta$.

**Rešenje.** S obzirom na

$$JD\,f(x) = Jf'(x) = \int_x^{x+h} f'(t)\,dt = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)\,,$$

zaključujemo da je $JD = \Delta$, tj.

$$J = \Delta D^{-1}\,. \tag{1}$$

Dokazali smo (videti (2) iz zadatka 6.1.19) da je $E = e^{Dh}$, tj.

$$D = \frac{1}{h}\log E\,. \tag{2}$$

Kako je

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (E-1)f(x)\,,$$

to je $\Delta = E - 1$, tj.

$$E = 1 + \Delta\,, \tag{3}$$

pa je, na osnovu (2),

$$D = \frac{1}{h}\log(1+\Delta)\,.$$

Na osnovu (1) i poslednje jednakosti, imamo

$$J = \Delta\left(\frac{1}{h}\log(1+\Delta)\right)^{-1}\,.$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) = \frac{hx}{\log(1+x)}\,,$$

pri čemu je, formalno, $J = g(\Delta)$. S obzirom da je

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,,$$

imamo

$$\begin{aligned}
g(x) &= h\,\frac{x}{x\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \cdots\right)}\\
&= h\left(1 + g_1(x) + (g_1(x))^2 + \cdots\right)\\
&= h\left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{12}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^3 - \frac{19}{720}\,x^4 + \cdots\right)\,,
\end{aligned}$$

gde je

$$g_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \cdots .$$

Dakle,

$$A = (1+E)J = (2+\Delta)\, g(\Delta) = 2h \left(1 + \Delta + \frac{1}{6}\,\Delta^2 - \frac{1}{90}\,\Delta^4 + \cdots\right) . \tag{4}$$

Kako je

$$\begin{aligned} Af(x) &= (1+E)J\, f(x) = (1+E) \int_x^{x+h} f(t)\, dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\, dt + \int_{x+h}^{x+2h} f(t)\, dt = \int_x^{x+2h} f(t)\, dt\,, \end{aligned}$$

uzimanjem samo prva tri člana u razvoju (4) dobijamo

$$Af(x) \cong 2h \left(1 + \Delta + \frac{1}{6}\,\Delta^2\right) f(x)\,,$$

tj.

$$\int_x^{x+2h} f(t)\, dt \cong \frac{h}{3}\,(f(x) + 4f(x+h) + f(x+2h)) .$$

Poslednja formula je poznata kao Simpsonova formula za numeričku integraciju.

**6.1.22.** Primenom prvog Newtonovog interpolacionog polinoma izračunati $\sin 6^\circ$ na osnovu vrednosti $\sin 5^\circ$, $\sin 7^\circ$, $\sin 9^\circ$, $\sin 11^\circ$. Proveriti da li se isti rezultat dobija korišćenjem drugog Newtonovog interpolacionog polinoma.

**Rešenje.** Neka je funkcija $f$ data parovima vrednosti $(x_k, f_k)$, gde je $f_k = f(x_k)$ i $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ $(h = \text{const} > 0)$.

Ako stavimo da je $p = \dfrac{x - x_0}{h}$, prvi Newtonov interpolacioni polinom glasi

$$P_n(x) = f_0 + p\,\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}\,\Delta^n f_0 \tag{1}$$

ili

$$\begin{aligned} P_n(x) = f_0 &+ \frac{\Delta f_0}{h}\,(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}\,(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,, \end{aligned} \tag{2}$$

gde je $\Delta$ operator prednje razlike, rekurzivno definisan sa

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \qquad \Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ako stavimo da je $q = \dfrac{x - x_n}{h}$, drugi Newtonov interpolacioni polinom glasi

$$P_n(x) = f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \tag{3}$$

ili

$$\begin{aligned} P_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ + \frac{\nabla^n f_n}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1)\,, \end{aligned}$$

gde je $\nabla$ operator zadnje razlike, rekurzivno definisan sa

$$\nabla^0 f(x) = f(x), \qquad \nabla^k f(x) = \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Formirajmo sada tablicu konačnih razlika operatora $\Delta$ za zadati problem:

| $k$ | $x_k$ | $f_k$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $5^\circ$ | $\underline{0.087156}$ | | | |
| | | | $\underline{0.034713}$ | | |
| 1 | $7^\circ$ | 0.121869 | | $\underline{-0.000148}$ | |
| | | | 0.034565 | | $\boxed{\underline{-0.000042}}$ |
| 2 | $9^\circ$ | 0.156434 | | $\boxed{-0.000190}$ | |
| | | | $\boxed{0.034375}$ | | |
| 3 | $11^\circ$ | $\boxed{0.190809}$ | | | |

Na osnovu formule (1) za prvi Newtonov interpolacioni polinom, s obzirom da je u našem slučaju, $n = 3,\ x_0 = 5^\circ,\ h = 2^\circ,\ p = \dfrac{6^\circ - 5^\circ}{2} = 0.5$, imamo

$$\begin{aligned} P_3\left(6^\circ\right) = 0.087156 + 0.5 \cdot 0.034713 + \frac{0.5(-0.5)}{2}(-0.000148) \\ + \frac{0.5(-0.5)(-1.5)}{6}(-0.000042) = 0.104528\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Primetimo da su pri ovome korišćeni podvučeni elementi iz tablice. Dakle, dobili smo

$$\sin 6^\circ \cong 0.104528\,,$$

gde su sve decimale tačne.

Izračunajmo sada približno $\sin 6^\circ$ na osnovu drugog Newtonovog interpolacionog polinoma. S obzirom da je

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} = \Delta f_{k-1} = \Delta E^{-1} f_k \,,$$

gde je $E$ operator pomeranja, zaključujemo da je

$$\nabla = \Delta E^{-1} \,,$$

a kako su operatori konačne razlike komutativni, sleduje

$$\nabla^m = \left(\Delta E^{-1}\right)^m = \Delta^m E^{-m} \qquad (m \in \mathbb{N})\,. \tag{5}$$

Na osnovu (5) imamo

$$\nabla f_3 = \Delta f_2 \,, \quad \nabla^2 f_3 = \Delta^2 f_1 \,, \quad \nabla^3 f_3 = \Delta^3 f_0 \,, \tag{6}$$

pa zaključujemo da za drugi Newtonov interpolacioni polinom možemo koristiti već formiranu tablicu operatora $\Delta$. Dakle, na osnovu (3), za $n = 3$, $x_3 = 11^\circ$, $h = 2^\circ$, $q = \dfrac{6^\circ - 11^\circ}{2^\circ} = -2.5$, imamo

$$\begin{aligned} P_3\left(6^\circ\right) &= 0.190809 + (-2.5)\cdot 0.034375 + \frac{(-2.5)(-1.5)}{2}(-0.000190) \\ &\quad + \frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)}{6}(-0.000042) = 0.104528\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Uočimo da su pri ovom korišćeni uokvireni elementi iz tablice konačnih razlika operatora $\Delta$, a s obzirom na (6).

Upoređivanjem (4) i (7) vidimo da su dobijeni rezultati, dati sa šest decimala, identični. Teorijski, s obzirom na jedinstvenost interpolacionog polinoma, to je trebalo i očekivati. Međutim, to u praksi nije uvek tako s obzirom na greške zaokrugljivanja koje se javljaju u procesu izračunavanja. Upravo sa tog (numeričkog) stanovišta, Newtonovi interpolacioni polinomi nisu naročito pogodni, pa se u praksi koriste uglavnom interpolacioni polinomi sa centralnim razlikama.

**6.1.23.** Koristeći priloženu tabelu sa prednjim razlikama za funkciju $x \mapsto \log_{10} x$, izračunati $\log_{10} 106$ i proceniti grešku.

| $x$ | $\log_{10} x$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 105 | 2.021189 | | | | |
| | | 0.020204 | | | |
| 110 | 2.041393 | | $-0.000899$ | | |
| | | 0.019305 | | 0.000077 | |
| 115 | 2.060698 | | $-0.000822$ | | $-0.000009$ |
| | | 0.018483 | | 0.000068 | |
| 120 | 2.079181 | | $-0.000754$ | | |
| | | 0.017729 | | | |
| 125 | 2.096910 | | | | |

**Rešenje.** Kako se vrednost $x = 106$ nalazi na početku intervala interpolacije koristićemo prvi Newtonov polinom. Ako stavimo $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ $(x_0 = 105,\ h = 5)$ i $\Delta_0^k \equiv \Delta^k f_0$ $(k = 1, 2, \dots)$, imamo

$$f_t \equiv f(x_0 + ht) = f_0 + \binom{t}{1}\Delta_0 + \binom{t}{2}\Delta_0^2 + \ \dots\ + \binom{t}{n}\Delta_0^n + R_n,$$

$$R_n = \binom{t}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + nh).$$

Za izračunavanje $f_t$, da bi se smanjio broj računskih operacija, koristi se Hornerova šema, tako da Newtonov interpolacioni polinom dobija oblik:

$$(1) \quad f_t = f_0 + t\left\{\Delta_0 + \frac{t-1}{2}\left[\Delta_0^2 + \frac{t-2}{3}\left(\Delta_0^3 + \cdots + \frac{t-n+1}{n}\Delta_0^n\right)\right]\right\} + R_n.$$

Ostatak se procenjuje pomoću formule

$$|R_n(t)| \le \mu_n \cdot h^{n+1} M,$$

gde je $\mu_n$ apsolutna vrednost ekstremne vrednosti izraza

$$\binom{t}{n+1}, \quad \text{za} \quad t \in (0,1),\ n \in \mathbb{N},$$

dok je

$$M \ge \max |f^{(n+1)}(\xi)|, \quad \xi \in (x_0, x_0 + nh).$$

Vrednosti za $\mu_n$ su date u tabeli:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mu_n$ | 0.1250 | 0.0642 | 0.0417 | 0.0303 |

S obzirom da je
$$t = \frac{106 - 105}{5} = 0.2,$$
na osnovu (1) imamo
$$\log 106 = 2.021189 + 0.2 \left\{ 20204 - 0.4 \left[ -899 - \frac{1.8}{3} \left( 77 - \frac{2.8}{4}(-9) \right) \right] \right\} \cdot 10^{-6} + R_n,$$
tako da je $\log 106 \approx 2.025306$. Kako je
$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \log_{10} e}{x^5},$$
za ostatak važi procena
$$|R_4| \leq \mu_4 h^5 \max |f^{(5)}(\xi)| \leq 0.0303 \cdot 5^5 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0.434}{105^5} \approx 10^{-7}.$$
Dakle, ostatak može da utiče na rezultat na šestoj decimali. Rezultat je izračunat na šest decimalnih mesta, gde je poslednje mesto zaokrugljeno.

**6.1.24.** U tabeli su date vrednosti funkcije $x \mapsto \log x$ u čvorovima $x_0 = 1.8$, $x_1 = 1.9$, $x_2 = 2.0$. Pomoću a) linearne, b) kvadratne interpolacije aproksimirati $\log 1.93$ i oceniti grešku.

| $x$ | $\log x$ | $\nabla \log x$ | $\nabla^2 \log x$ |
|---|---|---|---|
| 1.8 | 0.58779 | | |
| | | 0.05406 | |
| 1.9 | 0.64185 | | $-0.00276$ |
| | | 0.05130 | |
| 2.0 | 0.69315 | | |

**Rešenje.** Čvorovi su ekvidistantni sa korakom $h = 0.1$. Izračunavanje sprovodimo pomoću druge Newtonove interpolacione formule sa tačnošću na 5 decimalnih mesta. Potrebne prednje razlike funkcije $\log x$ date su u tabeli.

a) Zbog
$$P_1(x) = \log x_2 + \frac{\nabla \log x_2}{1!h}(x - x_2),$$

imamo

$$P_1(1.93) = 0.69315 + \frac{0.05130}{0.1}(-0.07) = 0.65724.$$

Za $x \in (x_1, x_2) = I$ imamo

$$M_2 = \sup_{\xi \in I} \left| -\frac{1}{\xi^2} \right| = \frac{1}{1.9^2} < 0.2771$$

i

$$|\log x - P_1(x)| \le \frac{M_2}{2!} |(x - x_2)(x - x_1)|,$$

tako da je

$$|\log x - P_1(x)| < \frac{0.2771}{2} |(1.93 - 2)(1.93 - 1.9)| = 0.00029.$$

b) Zbog

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{\nabla^2 \log x_2}{2! h^2}(x - x_2)(x - x_1),$$

imamo

$$P_2(1.93) = 0.65724 + \frac{-0.00276}{2 \cdot 0.1^2}(-0.07) \cdot 0.03 = 0.65753.$$

Za $x \in (x_0, x_2) = I$ imamo

$$M_3 = \sup_{\xi \in I} \left| \frac{2}{\xi^3} \right| = \frac{2}{1.8^3} < 0.343$$

i

$$|\log x - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} |(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)|,$$

tako da je

$$|\log 1.93 - P_2(1.93)| < \frac{0.343}{6} |(1.93 - 2)(1.93 - 1.9)(1.93 - 1.8)| < 0.00002.$$

Napomenimo da je tačna vrednost, na šest decimala, $\log 1.93 = 0.657520$.

**6.1.25.** Korišćenjem prve Gaussove, druge Gaussove i Stirlingove interpolacione formule, izračunati vrednost $f(0.95)$ na osnovu sledećih podataka

| $x$ | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0.6875$ | $-0.8299$ | $-0.9739$ | $-0.9659$ | $-0.6139$ |

**Rešenje.** Neka je funkcija $f$ data na skupu ekvidistantnih tačaka $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots,\ \pm n, \dots)$ $(h = \text{const} > 0)$. Na osnovu datih parova vrednosti $(x_k, f_k)_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm n,\dots}$ možemo formirati takozvanu centralnu tablicu prednjih razlika.

Tabela 1

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{-2}$ | $f_{-2}$ | | | | |
| | | $\Delta f_{-2}$ | | | |
| $x_{-1}$ | $f_{-1}$ | | $\Delta^2 f_{-2}$ | | |
| | | $\boxed{\Delta f_{-1}}$ | | $\boxed{\Delta^3 f_{-2}}$ | |
| $x_0$ | $\boxed{\underline{f_0}}$ | | $\boxed{\underline{\underline{\Delta^2 f_{-1}}}}$ | | $\boxed{\underline{\underline{\Delta^4 f_{-2}}}}$ |
| | | $\underline{\Delta f_0}$ | | $\underline{\Delta^3 f_{-1}}$ | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | | |
| | | $\Delta f_1$ | | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | | | |

Ako uvedemo smenu $x = x_0 + ph$, prva Gaussova interpolaciona formula (videti [2, str. 42]) ima oblik

$$
\begin{aligned}
P\,(x_0 + ph) = f_0 + p \cdot \Delta f_0 &+ \frac{p(p-1)}{2!}\,\Delta^2 f_{-1} + \frac{p(p^2-1^2)}{3!}\,\Delta^3 f_{-1} \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)(p-2)}{4!}\,\Delta^4 f_{-2} + \cdots \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}\,\Delta^{2n-1} f_{-(n-1)} \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)(p-n)}{(2n)!}\,\Delta^{2n} f_{-n} + \cdots \ .
\end{aligned}
$$

U ovoj formuli se upotrebljavaju razlike koje su podvučene u tabeli 1.

Druga Gaussova interpolaciona formula ([2, str. 42]) glasi:

$$
\begin{aligned}
P\,(x_0 + ph) = f_0 + p\,\Delta f_{-1} &+ \frac{p(p+1)}{2!}\,\Delta^2 f_{-1} + \frac{p(p^2-1^2)}{3!}\,\Delta^3 f_{-2} \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)(p+2)}{4!}\,\Delta^4 f_{-2} + \cdots \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}\,\Delta^{2n-1} f_{-n} \\
&+ \frac{p(p^2-1^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)(p+n)}{(2n)!}\,\Delta^{2n} f_{-n} + \cdots \ .
\end{aligned}
$$

U ovoj formuli se koriste razlike koje su uokvirene u tabeli 1.

Poluzbir prve i druge Gaussove interpolacione formule daje Stirlingovu interpolacionu formulu

$$\begin{aligned}P(x_0+ph) &= f_0 + p\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\Delta f_1+\Delta f_0\right)\right\} + \frac{p^2}{2!}\,\Delta^2 f_{-1}\\ &+ \frac{p(p^2-1^2)}{3!}\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\Delta^3 f_{-2}+\Delta^3 f_{-1}\right)\right\} + \frac{p(p^2-1^2)}{4!}\,\Delta^4 f_{-2} + \cdots\\ &+ \frac{p(p^2-1^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}\left\{\frac{1}{2}\left(\Delta^{2n-1} f_{-n}+\Delta^{2n-1} f_{-(n-1)}\right)\right\}\\ &+ \frac{p^2(p^2-1^2)\cdots(p^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\,\Delta^{2n} f_{-n} + \cdots\ .\end{aligned}$$

Učešće pojedinih razlika u ovoj formuli se pregledno uočava iz tabele 2.

Tabela 2

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{-2}$ | $f_{-2}$ | | | | |
| | | $\Delta f_{-2}$ | | | |
| $x_{-1}$ | $f_{-1}$ | | $\Delta^2 f_{-2}$ | | |
| $x_0$ | $\underline{f_0}$ | $\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Delta f_{-1}\\ \Delta f_0\end{matrix}\right\}$ | $\underline{\Delta^2 f_{-1}}$ | $\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Delta^3 f_{-2}\\ \Delta^3 f_{-1}\end{matrix}\right\}$ | $\underline{\Delta^4 f_{-2}}$ |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | | |
| | | $\Delta f_1$ | | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | | | |

Formirajmo sada centralnu tablicu prednjih razlika na osnovu datih podataka (tabela 3).

Tabela 3

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | −0.6875 | | | | |
| | | −0.1424 | | | |
| 0.7 | −0.8299 | | −0.0016 | | |
| | | $\boxed{-0.1440}$ | | $\boxed{0.1536}$ | |
| 0.9 | $\boxed{\underline{-0.9739}}$ | | $\boxed{\underline{0.1520}}$ | | $\boxed{\underline{0.0384}}$ |
| | | $\underline{0.0080}$ | | $\underline{0.1920}$ | |
| 1.1 | −0.9659 | | 0.3440 | | |
| | | 0.3520 | | | |
| 1.3 | −0.6139 | | | | |

Za čvor $x_0$ uzmimo čvor najbliži vrednosti $x$, tj. $x_0 = 0.9$. Imajući u vidu smenu $x = x_0 + ph$, nalazimo da je

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.95 - 0.9}{0.2} = 0.25\,.$$

Na osnovu prve Gaussove interpolacione formule i tabele 3, imamo ($p = 0.25$)

$$\begin{aligned} f(0.95) \cong P_4(0.95) &= -0.9739 + p \cdot 0.0080 + \frac{p(p-1)}{2}\, 0.1520 \\ &+ \frac{p(p^2-1)}{6}\, 0.1920 + \frac{p(p^2-1)(p-2)}{24}\, 0.0384 \cong -0.9930\,. \end{aligned}$$

Na osnovu druge Gaussove interpolacione formule i tabele 3, imamo ($p = 0.25$)

$$\begin{aligned} f(0.95) \cong P_4(0.95) &= -0.9739 + p\,(-0.1440) + \frac{p(p+1)}{2}\, 0.1520 \\ &+ \frac{p(p^2-1)}{6}\, 0.1536 + \frac{p(p^2-1)(p+2)}{24}\, 0.0384 \cong -0.9930\,. \end{aligned}$$

Na osnovu Stirlingove interpolacione formule i tabele 3, imamo ($p = 0.25$)

$$\begin{aligned} f(0.95) \cong P_4(0.95) &= -0.9739 + p\left\{\frac{1}{2}\,(-0.1440 + 0.0080)\right\} + \frac{p^2}{2}\, 0.1520 \\ &+ \frac{p(p^2-1)}{6}\left\{\frac{1}{2}\,(0.1536 + 0.1920)\right\} + \frac{p^2(p^2-1)}{24}\, 0.0384 \cong -0.9930\,. \end{aligned}$$

Svi rezulati su zaokrugljeni na četiri decimale.

**6.1.26.** Primenom Besselove interpolacione formule izračunati $\cos 14^\circ$ na osnovu vrednosti $\cos 11^\circ,\ \cos 13^\circ,\ \cos 15^\circ$ i $\cos 17^\circ$.

**Rešenje.** Neka je funkcija $f$ data na skupu ekvidistantnih tačaka $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots,\ \pm n, \dots$) ($h = \text{const} > 0$). Na osnovu vrednosti $(x_k,\ f_k)$ možemo formirati centralnu tablicu prednjih razlika (videti tabelu 1).

Ako uvedimo smenu $x = x_0 + ph$, Besselova interpolaciona formula (videti [2, str. 42–43]) glasi:

$$\begin{aligned} P(x_0 + ph) &= \left\{\frac{1}{2}\,(f_0 + f_1)\right\} + \Big(p - \frac{1}{2}\Big)\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\left\{\frac{1}{2}\Big(\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0\Big)\right\} \\ &+ \frac{p(p-1)\Big(p - \dfrac{1}{2}\Big)}{3!}\,\Delta^3 f_{-1} + \cdots \\ &+ \frac{p(p^2 - 1^2)\cdots(p^2 - (n-1)^2)(p-n)}{(2n)!}\left\{\frac{1}{2}\Big(\Delta^{2n} f_{-n} + \Delta^{2n} f_{-(n-1)}\Big)\right\} \\ &+ \frac{p(p^2 - 1^2)\cdots(p^2 - (n-1)^2)(p-n)\Big(p - \dfrac{1}{2}\Big)}{(2n+1)!}\,\Delta^{2n+1} f_{-n} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Tabela 1

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ | $\Delta^5 f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{-2}$ | $f_{-2}$ | | | | | |
| | | $\Delta f_{-2}$ | | | | |
| $x_{-1}$ | $f_{-1}$ | | $\Delta^2 f_{-2}$ | | | |
| | | $\Delta f_{-1}$ | | $\Delta^3 f_{-2}$ | | |
| $x_0$ | | | | | | |
| | $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} f_0 \\ \\ f_1 \end{Bmatrix}$ | $\underline{\Delta f_0}$ | $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \Delta^2 f_{-1} \\ \\ \Delta^2 f_0 \end{Bmatrix}$ | $\underline{\Delta^3 f_{-1}}$ | $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \Delta^4 f_{-2} \\ \\ \Delta^4 f_{-1} \end{Bmatrix}$ | $\underline{\Delta^5 f_{-2}}$ |
| $x_1$ | | | | | | |
| | | $\Delta f_1$ | | $\Delta^3 f_0$ | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta^2 f_1$ | | | |
| | | $\Delta f_2$ | | | | |
| $x_3$ | $f_3$ | | | | | |

Učešće pojedinih razlika u ovoj formuli se pregledno uočava iz tabele 1.

Formirajmo sada centralnu tablicu prednjih razlika na osnovu podataka datih zadatkom:

Tabela 2

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| $11^\circ$ | 0.98163 | | | |
| | | $-0.00726$ | | |
| $13^\circ$ | | | | |
| | $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0.97437 \\ \\ 0.96593 \end{Bmatrix}$ | $\underline{-0.00844}$ | $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -0.00118 \\ \\ -0.00119 \end{Bmatrix}$ | $\underline{-0.00001}$ |
| $15^\circ$ | | | | |
| | | $-0.00963$ | | |
| $17^\circ$ | 0.95630 | | | |

Ako uzmemo da je $x_0 = 13^\circ$, nalazimo da je $p = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{14^\circ - 13^\circ}{2^\circ} = \dfrac{1}{2}$, te u ovom slučaju, na osnovu Besselove formule, otpadaju svi članovi sa razlikama neparnog reda. Dakle, na osnovu ove interpolacione formule i tabele 2 imamo $(p = 1/2)$:

$$
\begin{aligned}
\cos 14^\circ \cong P\left(14^\circ\right) &= \left\{\frac{1}{2}\,(0.97437 + 0.96593)\right\} \\
&\quad + \frac{p(p-1)}{2}\,\left\{\frac{1}{2}\,(-0.00118 - 0.00119)\right\} \cong 0.97030\,.
\end{aligned}
$$

Rezultat je zaokrugljen na pet decimala.

Napomenimo da se za interpolaciju funkcija, na skupu ekvidistantnih tačaka, najčešće koriste Stirlingova (videti prethodni zadatak) i Besselova interpolaciona formula. Stirlingova formula se koristi kada je $|p| \leq 0.25$, a Besselova kada je $0.25 \leq |p| \leq 0.75$.

**6.1.27.** Proučiti kako se slučajna greška $\varepsilon$ u vrednosti funkcije u nekom od ekvidistantnih interpolacionih čvorova, manifestuje u tablici konačnih razlika.

**Rešenje.** Tablica konačnih razlika, sa greškom $\varepsilon$ u vrednosti $f_n$, ima sledeći oblik:

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n-4}$ | $f_{n-4}$ | | | | |
| | | $\Delta f_{n-4}$ | | | |
| $x_{n-3}$ | $f_{n-3}$ | | $\Delta^2 f_{n-4}$ | | |
| | | $\Delta f_{n-3}$ | | $\Delta^3 f_{n-4}$ | |
| $x_{n-2}$ | $f_{n-2}$ | | $\Delta^2 f_{n-3}$ | | $\Delta^4 f_{n-4} + \varepsilon$ |
| | | $\Delta f_{n-2}$ | | $\Delta^3 f_{n-3} + \varepsilon$ | |
| $x_{n-1}$ | $f_{n-1}$ | | $\Delta^2 f_{n-2} + \varepsilon$ | | $\Delta^4 f_{n-3} - 4\varepsilon$ |
| | | $\Delta f_{n-1} + \varepsilon$ | | $\Delta^3 f_{n-2} - 3\varepsilon$ | |
| $x_n$ | $f_n + \varepsilon$ | | $\Delta^2 f_{n-1} - 2\varepsilon$ | | $\Delta^4 f_{n-2} + 6\varepsilon$ |
| | | $\Delta f_n - \varepsilon$ | | $\Delta^3 f_{n-1} + 3\varepsilon$ | |
| $x_{n+1}$ | $f_{n+1}$ | | $\Delta^2 f_n + \varepsilon$ | | $\Delta^4 f_{n-1} - 4\varepsilon$ |
| | | $\Delta f_{n+1}$ | | $\Delta^3 f_n - \varepsilon$ | |
| $x_{n+2}$ | $f_{n+2}$ | | $\Delta^2 f_{n+1}$ | | $\Delta^4 f_n + \varepsilon$ |
| | | $\Delta f_{n+2}$ | | $\Delta^3 f_{n+1}$ | |
| $x_{n+3}$ | $f_{n+3}$ | | $\Delta^2 f_{n+2}$ | | |
| | | $\Delta f_{n+3}$ | | | |
| $x_{n+4}$ | $f_{n+4}$ | | | | |

Na osnovu tablice može se zaključiti sledeće:

1° Ako vrednost $f_n$ sadrži grešku, biće pogrešne sledeće razlike:

$$
\begin{array}{llll}
\Delta f_{n-1}\,, & \Delta f_n\,; & & \\
\Delta^2 f_{n-2}\,, & \Delta^2 f_{n-1}\,, & \Delta^2 f_n\,; & \\
\Delta^3 f_{n-3}\,, & \Delta^3 f_{n-2}\,, & \Delta^3 f_{n-1}\,, & \Delta^3 f_n\,;\ \text{itd.}
\end{array}
$$

$2^\circ$ Kod $k$-te konačne razlike, greška učestvuje po zakonu binomnih koeficijenata uz alternativnu promenu znaka, tj.

$$\binom{k}{0}\varepsilon\,, \quad -\binom{k}{1}\varepsilon\,, \quad \binom{k}{2}\varepsilon\,, \ldots\,, \ (-1)^k\binom{k}{k}\varepsilon\,.$$

Takođe, apsolutna vrednost maksimalne greške u $k$-toj konačnoj razlici $\binom{k}{[k/2]}|\varepsilon|$ vrlo brzo raste sa redom razlike.

$3^\circ$ Za svaku konačnu razliku $\Delta^k$ važe jednakosti:

$$\binom{k}{0}\varepsilon - \binom{k}{1}\varepsilon + \binom{k}{2}\varepsilon - \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}\varepsilon = (1-1)^k\,\varepsilon = 0$$

i

$$\binom{k}{0}|\varepsilon| + \binom{k}{1}|\varepsilon| + \binom{k}{2}|\varepsilon| + \cdots + \binom{k}{k}|\varepsilon| = (1+1)^k\,|\varepsilon| = 2^k\,|\varepsilon|\,.$$

U tablici konačnih razlika figurišu vrednosti funkcije $f$ sa određenim, fiksiranim, brojem decimalnih mesta. Ako se funkcija $f$ nad skupom vrednosti $\left\{(x_k, f_k)_{k=\overline{0,m}}\right\}$ iz tablice ponaša kao polinom stepena $r\,(< m)$, tada će konačne razlike reda $r$ biti konstantne, a konačne razlike reda $r+1$, $r+2$, $\ldots, m$ će biti jednake nuli (ili će biti približno jednake nuli s obzirom da su vrednosti funkcije koje su ušle u tablicu eventualno zaokružene). (Primetimo da funkcija $f$ ne mora biti polinom, a da iskaže opisano ponašanje. Na primer, ako za funkciju $f$ postoji Taylorov polinom pri čemu je odgovarajući ostatak za svako $x_k$ iz tablice toliko mali da ne utiče na decimale koje figurišu u tablici, tada je funkcija $f$ praktično tabelirana vrednostima iz Taylorovog polinoma.)

Svakako, ako postoji greška u vrednosti funkcije u nekom od interpolacionih čvorova, prethodni princip će biti narušen u polju prostiranja greške, kako smo prethodno videli, što nam predstavlja indikaciju o postojanju greške.

Zakon prostiranja greške u tablici konačnih razlika, koji je razmatran, daje mogućnost da se u nekim slučajevima pronađe izvor greške i otkloni.

**6.1.28.** Ispraviti grešku u vrednosti funkcije u jednom od interpolacionih čvorova, ako je dato

| 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1.020 | −0.692 | −0.076 | 0.872 | 2.212 | 3.980 | 6.228 | 9.004 | 12.356 | 16.332 |

**Rešenje.** Formirajmo tablicu konačnih razlika, na osnovu zadatih podataka:

| $k$ | $x_k$ | $f_k$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ | $\Delta^5 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | −1.020 | | | | | |
| | | | 0.328 | | | | |
| 1 | 1.2 | −0.692 | | 0.288 | | | |
| | | | 0.616 | | 0.044 | | |
| 2 | 1.4 | −0.076 | | 0.332 | | 0.016 | |
| | | | 0.948 | | 0.060 | | −0.040 |
| 3 | 1.6 | 0.872 | | 0.392 | | −0.024 | |
| | | | 1.340 | | 0.036 | | 0.040 |
| 4 | 1.8 | 2.212 | | 0.428 | | 0.016 | |
| | | | 1.768 | | 0.052 | | −0.020 |
| 5 | 2.0 | 3.980 | | 0.480 | | −0.004 | |
| | | | 2.248 | | 0.048 | | 0.004 |
| 6 | 2.2 | 6.228 | | 0.528 | | 0. | |
| | | | 2.776 | | 0.048 | | 0. |
| 7 | 2.4 | 9.004 | | 0.576 | | 0. | |
| | | | 3.352 | | 0.048 | | |
| 8 | 2.6 | 12.356 | | 0.624 | | | |
| | | | 3.976 | | | | |
| 9 | 2.8 | 16.332 | | | | | |

Iz tablice uočavamo sledeće: Razlike $\Delta^4 f_4$, $\Delta^4 f_5$ i $\Delta^5 f_4$, su jednake nuli, dok su preostale razlike četvrtog i petog reda različite od nule, s tim što su još i razlike petog reda, po modulu, uvećane u odnosu na odgovarajuće razlike četvrtog reda. Ovo nesumnjivo govori o postojanju greške u nekoj vrednosti funkcije $f_k$.

Dakle, možemo zaključiti da sve razlike četvrtog i petog reda koje su različite od nule, pripadaju polju prostiranja greške $\varepsilon$ u vrednosti funkcije $f_k$. Na osnovu analize iz prethodnog zadatka, u razlikama četvrtog reda postoji pet pogrešnih razlika te s obzirom na njihov raspored zaključujemo da je pogrešna vrednost funkcije za $x = 1.6$ $(k = 3)$.

Odredimo grešku $\varepsilon$.

S obzirom da bi konačne razlike četvrtog reda trebalo da budu jednake nuli, to je, na osnovu tablice, $\Delta^4 f_3 + \varepsilon = \varepsilon = -4 \cdot 10^{-3}$.

Ili, na osnovu trećih razlika, koje bi trebalo da budu konstantne (s obzirom da bi četvrte razlike trebalo da budu jednake nuli), nalazimo

$$
\begin{aligned}
\Delta^3 f_3 &= \frac{1}{4}\Big(\big(\Delta^3 f_3 - \varepsilon\big) + \big(\Delta^3 f_2 + 3\varepsilon\big) + \big(\Delta^3 f_1 - 3\varepsilon\big) + \big(\Delta^3 f_0 + \varepsilon\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\,(52 + 36 + 60 + 44) \cdot 10^{-3} = 48 \cdot 10^{-3}\,,
\end{aligned}
$$

ili direktno, na osnovu polja prostiranja greške $\varepsilon$, očitavamo na osnovu „neporemećenih“ trećih razlika $\Delta^3 f_4 = \Delta^3 f_3 = 48 \cdot 10^{-3}$, a dalje, s obzirom na $\Delta^3 f_3 - \varepsilon = 52 \cdot 10^{-3}$, nalazimo $\varepsilon = -4 \cdot 10^{-3}$.

Grešku $\varepsilon$ možemo naći u ovom slučaju i na osnovu drugih razlika koje bi u tačnoj tablici morale obrazovati aritmetičku progresiju (s obzirom da bi treće razlike trebalo da budu konstantne). Dakle, tačna vrednost $\Delta^2 f_2$ je

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_2 &= \frac{1}{3}\Big(\big(\Delta^2 f_1 + \varepsilon\big) + \big(\Delta^2 f_2 - 2\varepsilon\big) + \big(\Delta^2 f_3 + \varepsilon\big)\Big)\\ &= \frac{1}{3}\,(332 + 392 + 428)\cdot 10^{-3} = 384 \cdot 10^{-3}\,,\end{aligned}$$

pa $\varepsilon$ nalazimo na osnovu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\Delta^2 f_2 - \big(\Delta^2 f_2 - 2\varepsilon\big)\Big) = \frac{1}{2}\,(384 - 392)\cdot 10^{-3} = -4 \cdot 10^{-3}\,.$$

Najzad, ispravljena vrednost $f$ za $x = 1.6$, biće

$$f_3 = (f_3 + \varepsilon) - \varepsilon = 0.872 - (-0.004) = 0.876\,.$$

**6.1.29.** Koristeći metode interpolacije, odrediti karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 4 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

**Rešenje.** Karakteristični polinom matrice $A$ je

$$Q(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,,$$

gde je $I$ jedinična matrica istog reda kao i $A$. S obzirom da je, u ovom slučaju, karakteristični polinom četvrtog stepena, uzmimo pet interpolacionih čvorova, na primer

$$\lambda_k = k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)\,,$$

za koje nalazimo odgovarajuće vrednosti $Q(\lambda_k) = Q(k) = Q_k$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, a zatim formiramo tablicu konačnih razlika operatora $\Delta$:

| $\lambda_k$ | $Q_k$ | $\Delta Q_k$ | $\Delta^2 Q_k$ | $\Delta^3 Q_k$ | $\Delta^4 Q_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −93 | | | | |
| | | 69 | | | |
| 1 | −24 | | −38 | | |
| | | 31 | | −30 | |
| 2 | 7 | | −68 | | 24 |
| | | − 37 | | −6 | |
| 3 | −30 | | −74 | | |
| | | −111 | | | |
| 4 | −141 | | | | |

Primenjujući prvu interpolacionu formulu Newtona imamo

$$
Q(\lambda) = Q_0 + \sum_{k=1}^{4} \frac{\Delta^k Q_0}{k!}\, \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)\,. \tag{1}
$$

S obzirom da je

$$
\lambda^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) = \sum_{m=1}^{k} S_k^{(m)} \lambda^m \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{2}
$$

gde se koeficijenti $S_k^{(m)}$ nazivaju Stirlingovi brojevi prve vrste, na osnovu (1), imamo

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) &= Q_0 + \sum_{k=1}^{4} \frac{\Delta^4 Q_0}{k!} \sum_{m=1}^{k} S_k^{(m)} \lambda^m \\
&= Q_0 + \sum_{m=1}^{4} \lambda^m \sum_{k=m}^{4} S_k^{(m)} \frac{\Delta^k Q_0}{k!}\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \lambda\,,\\
&\lambda(\lambda-1) = \lambda^2 - \lambda\,,\\
&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda\,,\\
&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda\,,
\end{aligned}
$$

s obzirom na (2), nalazimo

$$
\begin{aligned}
&S_1^{(1)} = 1\,;\\
&S_2^{(1)} = -1\,, \quad S_2^{(2)} = 1\,;\\
&S_3^{(1)} = 2\,, \quad S_3^{(2)} = -3\,, \quad S_3^{(3)} = 1\,;\\
&S_4^{(1)} = -6\,, \quad S_4^{(2)} = 11\,, \quad S_4^{(3)} = -6\,, \quad S_4^{(4)} = 1\,;
\end{aligned}
$$

pa na osnovu (3), imamo

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) = -93 &+ \Big(1\cdot 69 + (-1)\,\frac{(-38)}{2!} + 2\,\frac{(-30)}{3!} + (-6)\,\frac{24}{4!}\Big)\lambda \\
&+ \Big(1\cdot \frac{(-38)}{2!} + (-3)\,\frac{(-30)}{3!} + 11\,\frac{24}{4!}\Big)\lambda^2 \\
&+ \Big(1\,\frac{(-30)}{3!} + (-6)\,\frac{24}{4!}\Big)\lambda^3 + 1\cdot \frac{24}{4!}\,\lambda^4\,,
\end{aligned}
$$

tj.

$$Q(\lambda) = \lambda^4 - 11\,\lambda^3 + 7\,\lambda^2 + 72\,\lambda - 93\,.$$

**6.1.30.** Približno izračunati

$$g(y) = \frac{d}{dy}\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}}\,dx \qquad (0 \le y \le 1)\,,$$

na osnovu vrednosti funkcije $f(x)$ u tačkama $x_i = 0.1 \cdot i$ $(i = 0, 1, \dots, 10)$.

**Rešenje.** Nađimo najpre

$$h(y) = \frac{d}{dy}\int_0^y \frac{x^n}{\sqrt{y-x}}\,dx \qquad (n = 0, 1, \dots)\,.$$

Uvođenjem smene

$$x = y\sin^2 t \quad\Longrightarrow\quad dx = 2y\sin t\cos t\,dt\,,$$

dobijamo

$$h(y) = \frac{d}{dy}\,\frac{2y^{n+1}}{\sqrt{y}}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} t\,dt = \frac{(2n+1)\,y^n}{\sqrt{y}}\;W_{2n+1}\,,$$

gde je

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} t\,dt\,. \tag{1}$$

Metodom parcijalne integracije, ako uzmemo

$$\begin{aligned} &u = \sin^{2n} t\,, \qquad dv = \sin t\,dt\,,\\ &du = 2n\sin^{n-1} t\cos t\,dt\,, \qquad v = -\cos t\,, \end{aligned}$$

na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= 2n\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1} t\cos^2 t\,dt\\ &= 2n\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1} t\left(1-\sin^2 t\right)\,dt\\ &= 2n\,\left(W_{2n-1} - W_{2n+1}\right)\,, \end{aligned}$$

tj.

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

S obzirom da je $W_1 = 1$, na osnovu (2), dobijamo

$$W_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ako funkciju $f$ aproksimiramo sa

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{10} a_n x^n, \tag{3}$$

to je

$$\begin{aligned} g(y) &\cong \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{10} (2n+1)\, a_n\, W_{2n+1}\, y^n \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{y}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{n=1}^{10} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} a_n\, y^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Preostalo je da još nađemo koeficijente $a_n$ iz (3). Za njihovo određivanje ćemo iskoristićemo prvi Newtonov interpolacioni polinom (videti (1) u zadatku 6.1.22) sa korakom $h = 0.1$:

$$\begin{aligned} f(x) \cong f(0) + 10x\, \Delta f(0) + \frac{10x\,(10x-1)}{2!} \Delta^2 f(0) + \cdots \\ + \frac{10x\,(10x-1)\cdots(10x-9)}{10!} \Delta^{10} f(0). \end{aligned}$$

Kako je

$$(10x)^{(n)} = 10x\,(10x-1)\cdots(10x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} S_n^{(k)}\,(10x)^k,$$

gde su $S_n^{(k)}$ Stirlingovi brojevi prve vrste, to je

$$\begin{aligned} f(x) &\cong f(0) + \sum_{n=1}^{10} \frac{(10x)^{(n)}}{n!} \Delta^n f(0) \\ &\cong f(0) + \sum_{n=1}^{10} \frac{\Delta^n f(0)}{n!} \left( \sum_{k=1}^{n} S_n^{(k)}\,(10x)^k \right). \end{aligned}$$

Na osnovu (3) zaključujemo da je

$$a_0 = f(0)\,,$$
$$a_k = 10^k \sum_{n=k}^{10} \frac{\Delta^n f(0)}{n!}\, S_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 10)\,,$$

što zajedno sa (4) daje formulu za približno izračunavanje $g(y)$.

**6.1.31.** Formirati Hermiteov interpolacioni polinom na osnovu sledećih podataka

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-7$ | $3$ |
| $f'(x)$ | $-8$ | $-5$ | $55$ |
| $f''(x)$ | | $10$ | |

**Rešenje.** Kako je dato sedam podataka, interpolacioni polinom će biti stepena ne više od šestog. Potražimo ga u obliku

$$H_6(x) = P_2(x) + (x+1)(x-2)x\, H_3(x)\,, \tag{1}$$

gde je $P_2(x)$ Lagrangeov interpolacioni polinom formiran na osnovu vrednosti funkcije $f$ u tačkama $x = -1,\ x = 0,\ x = 2$, tj.

$$P_2(x) = -7\,\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 3\,\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = 4x^2 - 3x - 7\,,$$

a $H_3(x)$ za sada nepoznat polinom ne višeg stepena od tri.

Diferenciranjem (1) dobijamo

$$H_6'(x) = 8x - 3 + \big(3x^2 - 2x - 2\big) H_3(x) + (x+1)(x-2)x\, H_3'(x)\,,$$

odakle, s obzirom na interpolacioni zahtev $H_6'(-1) = f'(-1) = -8$, $H_6'(0) = f'(0) = -5$ i $H_6'(2) = f'(2) = 55$, sleduje

$$H_3(-1) = 1\,, \quad H_3(0) = 1\,, \quad H_3(2) = 7\,. \tag{2}$$

Kako je dalje

$$H_6''(x) = 8 + (6x-2)\, H_3(x) + (6x - 4x - 4)\, H_3'(x) + (x+1)(x-2)x\, H_3''(x)$$

i $H_6''(0) = f''(0) = 10$, dobijamo

$$H_3'(0) = -1\,. \tag{3}$$

Primenimo sada isti postupak na određivanje polinoma $H_3$, na osnovu podataka (2) i (3). Dakle, imamo

$$H_3(x) = P_2^*(x) + (x+1)(x-2)x\,a \qquad (a = H_0(x)),$$

gde je

$$P_2^*(x) = 1\,\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + 1\,\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 7\,\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = x^2 + x + 1\,.$$

Dalje, kako je

$$H_3'(x) = 2x + 1 + \big(3x^2 - 2x - 2\big)a$$

i $H_3'(0) = -1$, dobijamo $a = 1$, pa je

$$H_3(x) = x^3 - x + 1\,.$$

Najzad, na osnovu (1), dobijamo

$$H_6(x) = x^6 - x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 5x - 7\,.$$

**6.1.32.** Odrediti Hermiteov interpolacioni polinom koji u tačama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ima vrednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ i vrednosti izvoda $y_0', y_1', \ldots, y_n'$.

**Rešenje.** Hermiteov interpolacioni polinom tražimo u obliku

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_n(x) H_{m-n}(x),$$

gde je $L_n$ Lagrangeov polinom $n$-tog stepena, formiran na osnovu podataka $(x_k, y_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ i

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n).$$

Diferenciranjem dobijamo

$$H_m'(x) = L_n'(x) + \omega_n'(x) H_{m-n}(x) + \omega_n(x) H_{m-n}'(x)\,,$$

pa je, na osnovu interpolacionog zahteva,

$$y_i' = L_n'(x_i) + \omega_n'(x_i) H_{m-n}(x_i),$$

i

$$H_{m-n}(x_i) = \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)}.$$

Dakle,

$$H_{m-n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Neka je

$$\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)} = L_{ni}(x)\,.$$

Tada je interpolacioni polinom Hermitea moguće zapisati u obliku

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{ni}(x) + \sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x).$$

Razbijmo poslednju sumu na dva dela

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i' \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) - \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x).$$

Prvi izraz sa desne strane napišimo na sledeći način

$$\sum_{i=0}^{n} y_i' \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i'(x-x_i) L_{ni}^2(x),$$

a drugi podvrgnimo transformacijama

$$\begin{aligned}
\omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) &= \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j L_{nj}'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) \\
= \sum_{j=0}^{n} y_j \sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{nj}'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \, L_{ni}(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} \, L_{nj}(x).
\end{aligned}$$

Na taj način traženi polinom je moguće zapisati u obliku

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left\{ L_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} \, L_{nj}(x) \right\} + \sum_{i=0}^{n} y_i'(x-x_i) L_{ni}^2(x).$$

Razmotrimo izraz koji stoji u zagradama pod znakom prve sume

$$P_i(x) = L_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} \, L_{nj}(x).$$

To je polinom stepena $2n+1$. Za $x = x_k$ dobijamo

$$P_i(x_k) = L_{ni}(x_k) = \delta_{ik}.$$

Dakle, naš polinom dobija vrednost nula za svako $x_k,\ k \neq i$. Razmotrimo izvod tog polinoma

$$P_i'(x) = L_{ni}'(x) - \omega_n'(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)}\, L_{nj}(x) - \omega_n(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)}\, L_{nj}'(x).$$

Za $x = x_k$ dobijamo

$$P_i'(x_k) = L_{ni}'(x_k) - \omega_n'(x_k) \sum_{j=0}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)}\, L_{nj}(x_k) = L_{ni}'(x_k) - L_{ni}'(x_k) = 0.$$

Na taj način, $P_i(x)$ ima dvostruki koren za svako $x = x_k, k \neq i$. Dakle, taj polinom sadrži množitelj

$$\frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_i)^2}.$$

Kako je stepen polinoma $P_i(x)$ jednak $2n+1$ možemo ga zapisati u obliku

$$P_i(x) = \frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_i)^2}\left[A + B(x-x_i)\right]. \tag{1}$$

Odredimo koeficijente $A$ i $B$. Stavljajući $x = x_i$ u (1) dobijamo

$$1 = {\omega_n'}^2(x_i) A,$$

odakle je

$$A = \frac{1}{{\omega_n'}^2(x_i)}.$$

Diferencirajući jednakost (1), a zatim stavljajući $x = x_i$, dobijamo

$$0 = P_i'(x_i) = \omega_n'(x_i)\omega_n''(x_i)A + {\omega_n'}^2(x_i)B.$$

Otuda je

$$B = -\frac{\omega_n''(x_i)}{{\omega_n'}^3(x_i)}.$$

Sada je polinom $P_i(x)$ moguće predstaviti u obliku

$$P_i(x) = \frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_i)^2{\omega_n'}^2(x_i)}\left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)}(x-x_i)\right] = L_{ni}^2(x)\left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)}(x-x_i)\right].$$

Dakle,

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)}(x - x_i)\right] L_{ni}^2(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i'(x - x_i) L_{ni}^2(x),$$

tj.

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ y_i \left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)}(x - x_i)\right] + y_i'(x - x_i) \right\} L_{ni}^2(x).$$

**6.1.33.** Odrediti opšti oblik Hermiteovog interpolacionog polinoma za realnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$ $(x \in [a,b])$, pri čemu su, u interpolacionim čvorovima $x_i$, poznate vrednosti $y_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1)$.

**Rešenje.** Neka je zadat bazni sistem interpolacionih funkcija

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

na $[a,b]$. Odredimo takvu linearnu kombinaciju ovih funkcija

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x) \tag{1}$$

koja zadovoljava uslove

$$\begin{gathered}
\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \ \ldots\ , \varphi^{(\alpha_0 - 1)}(x_0) = y_0^{(\alpha_0 - 1)}, \\
\varphi(x_1) = y_1, \quad \varphi'(x_1) = y_1', \ \ldots\ , \varphi^{(\alpha_1 - 1)}(x_1) = y_1^{(\alpha_1 - 1)}, \\
\vdots \\
\varphi(x_n) = y_n, \quad \varphi'(x_n) = y_n', \ \ldots\ , \varphi^{(\alpha_n - 1)}(x_n) = y_n^{(\alpha_n - 1)},
\end{gathered}$$

gde su $y_i^{(j)}$ poznate vrednosti, a $x_i \in [a,b]$ $(i = 0, 1, 2,\ \ldots\ , n;\ x_i \neq x_j$ pri $i \neq j)$. Kako je broj uslova koje namećemo funkciji $\varphi(x)$ jednak

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ \cdots\ + \alpha_n$$

da bi naš zadatak imao jedinstveno rešenje potrebno je da

$$m = \alpha_0 + \alpha_1 + \ \cdots\ + \alpha_n - 1$$

i

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0'(x_0) & \varphi_1'(x_0) & & \varphi_m'(x_0) \\ \vdots & & & \\ \varphi_0^{(\alpha_0-1)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0-1)}(x_0) & & \varphi_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & & & \\ \varphi_0^{(\alpha_n-1)}(x_n) & \varphi_1^{(\alpha_n-1)}(x_n) & & \varphi_m^{(\alpha_n-1)}(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ako se ograničimo na slučaj kada je $\varphi_i(x) = x^i$, onda polinom (1) predstavlja Hermiteov algebarski interpolacioni polinom za funkciju $x \mapsto f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Odredimo sada opšti oblik Hermiteovog interpolacionog polinoma. U tu svrhu uvedimo polinome $H_{ij}(x)$ stepena ne višeg od $m$, koji zadovoljavaju sledeće uslove:

$$H_{ij}(x_k) = H_{ij}'(x_k) = \cdots = H_{ij}^{(\alpha_k-1)}(x_k) = 0, \quad i \neq k,$$

$$H_{ij}(x_i) = H_{ij}'(x_i) = \cdots = H_{ij}^{(j-1)}(x_i) = H_{ij}^{(j+1)}(x_i) = \cdots = H_{ij}^{(\alpha_i-1)}(x_i) = 0,$$

$$H_{ij}^{(j)}(x_i) = 1 \qquad (i = 0, 1, \dots, n;\ j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1).$$

Kako $H_{ij}$ ima nule

$$x_0, x_1, \ \dots\ , x_{i-1}, x_{i+1}, \ \dots\ , x_n,$$

redom višestrukosti

$$\alpha_0, \alpha_1, \ \dots\ , \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ \dots\ , \alpha_n,$$

a u tački $x_i$ nulu viëstrukosti $j$, to je

$$H_{ij}(x) = (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \ \cdots\ (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x - x_i)^j \times \\ \times (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \cdots\ (x - x_n)^{\alpha_n} \widetilde{H}_{ij}(x),$$

gde je $\widetilde{H}_{ij}(x)$ polinom stepena $\alpha_i - j - 1$, različit od nule za $x = x_i$. Predstavimo ga, zato, u obliku

$$\widetilde{H}_{ij}(x) = A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \cdots + A_{ij}^{(\alpha_i-j-1)}(x - x_i)^{\alpha_i-j-1}.$$

Neka je

$$\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_n)^{\alpha_n},$$

i

$$\Omega_i(x) = (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \cdots (x - x_n)^{\alpha_n},$$

tada je

$$A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \cdots + A_{ij}^{(\alpha_i - j - 1)}(x - x_i)^{\alpha_i - j - 1} = \frac{1}{\Omega_i(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} .$$

Ako pustimo da $x \to x_i$, dobijamo:

$$A_{ij}^{(0)} = \lim_{x \to x_i} \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] .$$

Graničnu vrednost drugog člana kada $x \to x_i$ nalazimo po L'Hospitalovom pravilu:

$$\lim_{x \to x_i} \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] = \lim_{x \to x_i} \frac{H_{ij}^{(j)}(x)}{j!} = \frac{1}{j!} ,$$

pa je

$$A_{ij}^{(0)} = \frac{1}{j!} \frac{1}{\Omega_i(x_i)} .$$

Na sličan način nalazimo koeficijente $A_{ij}^{(k)}$:

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \to x_i} \frac{d^k}{d\, x^k} \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] .$$

Primenom Leibnizovog pravila za diferenciranje proizvoda imamo

$$\frac{d^k}{d\, x^k} \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \right]^{(p)} \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)} .$$

Izvod

$$\left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \right]^{(p)}$$

je neprekidan u tački $x = x_i$. Dakle,

$$\lim_{x \to x_i} \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \right]^{(p)} = \left[ \frac{1}{\Omega_i(x)} \right]^{(p)}_{x = x_i} .$$

Za nalazenje granične vrednosti

$$\lim_{x \to x_i} \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)}$$

postupamo na sledeći način.

Polinom $H_{ij}(x)$ je ne višeg stepena od $m$. On je deljiv sa $(x-x_i)^j$, stoga ga možemo predstaviti u obliku

$$H_{ij}(x) = B_{ij}^{(0)}(x-x_i)^j + B_{ij}^{(1)}(x-x_i)^{j+1} + \cdots + B_{ij}^{(m-j)}(x-x_i)^m$$

ili

$$\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j} = B_{ij}^{(0)} + B_{ij}^{(1)}(x-x_i) + \cdots + B_{ij}^{(m-j)}(x-x_i)^{m-j}.$$

Dakle,

$$\lim_{x\to x_i}\left[\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j}\right]^{(k-p)} = (k-p)!\,B_{ij}^{(k-p)}.$$

S druge strane, koeficijente $B_{ij}^{(k-p)}$ u razvoju $H_{ij}(x)$ po stepenima od $x-x_i$, možemo predstaviti u obliku

$$B_{ij}^{(k-p)} = \frac{H_{ij}^{(j+k-p)}(x_i)}{(j+k-p)\,!}\ .$$

U našem slučaju je

$$j+k-p \le j+k \le j+\alpha_i-j-1 = \alpha_i - 1.$$

Uočimo da je $B_{ij}^{(k-p)}$ $(k-p=0,1,\ldots,\alpha_i-j-1)$ različito od nule samo za $p=k$, i u tom slučaju

$$B_{ij}^{(0)} = \frac{1}{j\,!}\ .$$

Dakle,

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!}\lim_{x\to x_i}\frac{d^k}{d\,x^k}\left[\frac{1}{\Omega_i(x)}\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j}\right] = \frac{1}{k\,!j\,!}\left[\frac{1}{\Omega_i(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)}$$

i

$$H_{ij}(x) = \frac{1}{j\,!}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{\Omega_i(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)}(x-x_i)^k\,.$$

Na osnovu svojstava funkcija $x\mapsto H_{ij}(x)$ nije teško uočiti da

$$\varphi(x) \equiv H_m(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(j)} H_{ij}(x)$$

ili

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} y_i^{(j)} \frac{1}{k\,!} \frac{1}{j\,!} \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}} \,.$$

**6.1.34.** Koristeći Hermiteovu interpolaciju dokazati da je

$$\begin{aligned} f_s = (1+2s)(1-s)^2 f_0 + (3-2s)s^2 f_1 + s(1-s)^2 h f_0' \\ - s^2(1-s)hf_1' + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \cdot s^2(1-s)^2, \end{aligned}$$

gde je $f_s = f(x_0 + sh),\ x_0 < \xi < x_0 + h,\ 0 < s < 1$, a zatim izvesti formulu

$$f_{1/2} = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{8}(f_0' - f_1') + \frac{h^4}{384} f^{(4)}(\xi).$$

**Rešenje.** Konstruišimo, najpre, Hermiteov interpolacioni polinom na osnovu datih podataka: $f(x_0) = f_0,\ f(x_1) = f_1$ i $f'(x_0) = f_0',\ f'(x_1) = f_1'$:

$$H_3(x) = P_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)H_1(x),$$

gde je $H_1(x) = \alpha x + \beta$ i

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1 = -\frac{1}{h}(x-x_1)f_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)f_1.$$

Kako je

$$\begin{aligned} H_3'(x) &= P_1'(x) + (2x-x_0-x_1)H_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)H_1'(x) \\ &= -\frac{1}{h}f_0 + \frac{1}{h}f_1 + (2x-x_0-x_1)H_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)H_1'(x), \end{aligned}$$

to iz uslova

$$f_0' = H_3'(x_0) = -\frac{1}{h}f_0 + \frac{1}{h}f_1 - hH_1(x_0)$$

dobijamo

$$H_1(x_0) = -\frac{1}{h^2}f_0 + \frac{1}{h^2}f_1 - \frac{1}{h}f_0',$$

a iz

$$f_1' = H_3'(x_1) = -\frac{1}{h}f_0 + \frac{1}{h}f_1 + hH_1(x_1)$$

dobijamo

$$H_1(x_1) = \frac{1}{h^2}f_0 - \frac{1}{h^2}f_1 + \frac{1}{h}f_1'.$$

Dakle, imamo

$$\alpha x_0 + \beta = -\frac{1}{h^2}f_0 + \frac{1}{h^2}f_1 - \frac{1}{h}f_0', \tag{1}$$

$$\alpha x_1 + \beta = \frac{1}{h^2}f_0 - \frac{1}{h^2}f_1 + \frac{1}{h}f_1'. \tag{2}$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina, na primer, oduzimanjem (2) od (1), dobijamo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2}{h^3}f_0 - \frac{2}{h^3}f_1 + \frac{1}{h^2}(f_1' + f_0'),\\
\beta &= -\frac{1}{h^3}(x_0 + x_1)f_0 + \frac{1}{h^3}(x_0 + x_1)f_1 - \frac{1}{h^2}x_1 f_0' - \frac{1}{h^2}x_0 f_1',
\end{aligned}$$

pa je

$$H_1(x) = \frac{1}{h^3}(2x - x_0 - x_1)f_0 - \frac{1}{h^3}(2x - x_0 - x_1)f_1 + \frac{1}{h^2}(x - x_1)f_0' + \frac{1}{h^2}(x - x_0)f_1'$$

i

$$\begin{aligned}
H_3(x) &= P_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)H_1(x)\\
&= -\frac{1}{h^3}(x - x_1)[h^2 - (x - x_0)(2x - x_0 - x_1)]f_0\\
&\quad + \frac{1}{h^3}(x - x_0)[h^2 - (x - x_1)(2x - x_0 - x_1)]f_1\\
&\quad + \frac{1}{h^2}(x - x_0)(x - x_1)^2 f_0' + \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2(x - x_1)f_1'.
\end{aligned}$$

Dalje, $f(x) = H_3(x) + R_3(f; x)$, gde je

$$R_3(f; x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \Omega_3(x), \quad \Omega_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
H_3(x_s) &= H_3(x_0 + sh)\\
&= (-2s^2 + s + 1)(1 - s)f_0 + s^2(3 - 2s)f_1 + sh(1 - s)^2 f_0' - s^2 h(1 - s)f_1';\\
\Omega_3(x_s) &= \Omega_3(x_0 + sh) = h^4 s^2(1 - s)^2,
\end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} f_s &= f(x_s) = f(x_0 + sh) \\ &= (1-s)^2(2s+1)f_0 + s^2(3-2s)f_1 + sh(1-s)^2 f_0' - s^2 h(1-s) f_1' \\ &\qquad + \frac{h^4}{4!} s^2 (1-s)^2 \cdot f^{(4)}(\xi), \end{aligned}$$

gde je $\xi \in (x_0, x_0 + h)$ i $s \in (0, 1)$.

Specijalno, za $s = 1/2$, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{1/2} &= \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{8} h f_0' - \frac{1}{8} h f_1' + \frac{h^4}{4!} \frac{1}{16} f^{(4)}(\xi) \\ &= \frac{1}{2}(f_0 + f_1) + \frac{1}{8} h (f_0' - f_1') + \frac{h^4}{384} f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

**6.1.35.** Na osnovu skupa podataka

| $x$ | $-\pi$ | $-2\pi/3$ | $-\pi/2$ | $0$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 0.5 | 0 | 2 | 0 |

odrediti trigonometrijski interpolacioni polinom.

**Rešenje.** Na osnovu formule (3) iz zadatka 6.1.3, za $n = 2$, dobijamo

$$\begin{aligned} T_2(x) = 2 &\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ + 0.5 &\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ + 2 &\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}, \end{aligned}$$

odakle, posle sređivanja, nalazimo

$$T_2(x) = 1 + \cos 2x\,.$$

**6.1.36.** Za sledeći skup podataka konstruisati Pronyevu (eksponencijalnu) interpolacionu funkciju.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $f_k$ | 1 | 3 | 7 | 15 |

**Rešenje.** Funkcija $f$ data na skupu ekvidistantnih tačaka parovima

$$(x_k, f_k)_{k=0,1,\dots,2n-1},$$

pri čemu je $f_k = f(x_k)$, $x_k - x_{k-1} = h = \text{const}$, može se interpolirati Pronyevom funkcijom

(1) $$F(x) = \Phi\left(\frac{x - x_0}{h}\right) = C_1\,\Phi_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + \cdots + C_n\,\Phi_n\left(\frac{x - x_0}{h}\right),$$

gde su $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ partikularna rešenja linearne diferencne jednačine $n$-tog reda

$$\Phi(k+n) + a_n\,\Phi(k+n-1) + \cdots + a_2\,\Phi(k+1) + a_1\,\Phi(k) = 0,$$

a koeficijenti $a_1, \dots, a_n$ su rešenja sistema linaernih jednačina

(2) $$f_k\,a_1 + f_{k+1}\,a_2 + \cdots + f_{k+n-1}\,a_n = -f_{k+n} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Konstante $C_1, \dots, C_n$ se mogu odrediti, na primer, iz sistema linearnih jedačina

$$C_1\,\Phi_1(k) + \cdots + C_n\,\Phi_n(k) = f_k \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

(videti [2, str. 86–88]).

Oblik partikularnih rešenja $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ zavisi od korena karakteristične jednačine

(3) $$r^n + a_n r^{n-1} + \cdots + a_2 r + a_1 = 0.$$

Vratimo se sada konkretnom zadatku.

S obzirom da su zadatkom date četiri tačke ($n = 2$), stavljajući $\dfrac{x-x_0}{h} = \dfrac{x-1}{2} = k$, interpolaciona funkcija (1) postaje

(4) $$\Phi(k) = C_1\,\Phi_1(k) + C_2\,\Phi_2(k),$$

gde funkcije $\Phi_i$ $(i = 1, 2)$ određujemo na osnovu korena karakteristične jednačine (3), tj.

(5) $$r^2 + a_2 r + a_1 = 0.$$

Koeficijente jednačine (5) određujemo iz sistema jednačina (2), koji u ovom slučaju glasi

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 &= -\ 7, \\ 3a_1 + 7a_2 &= -15\,. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $a_1 = 2$ i $a_2 = -3$, pa jednačina (5), tj.

$$r^2 - 3r + 2 = 0\,,$$

ima rešenja $r_1 = 1,\ r_2 = 2$.

Interpolaciona funkcija (4), dakle, ima oblik

$$\Phi(k) = C_1 + C_2\, 2^k\,,$$

gde konstante $C_1$ i $C_2$ određujemo iz interpolacionog zahteva za bilo koje dve tačke iz skupa zadatih tačaka. Na primer,

$$\Phi(0) = f_0 = 1 = C_1 + C_2,$$

$$\Phi(1) = f_1 = 3 = C_1 + 2C_2,$$

odakle je $C_1 = -1,\ C_2 = 2$.

S obzirom na smenu $k = \dfrac{x-1}{2}$, tražena interpolaciona funkcija glasi

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-1}{2}\right) = -1 + 2\cdot 2^{(x-1)/2} = -1 + 2^{(x+1)/2}$$

ili

$$F(x) = -1 + e^{\alpha(x+1)/2}\,,$$

gde je $\alpha = \log 2$, zbog čega se ovaj tip interpolacije i zove eksponencijalna interpolacija.

**6.1.37.** Data je jednačina

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

koja na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima jedinstven prost koren.

Aproksimirati funkciju $f$ u ekvidistantnim tačkama $x_0,\ x_1,\ x_2\ (\in [\alpha, \beta])$, interpolacionom funkcijom oblika

$$F(x) = A + B\, e^{Cx}\,, \tag{2}$$

a zatim za aproksimaciju korena jednačine (1) iskoristiti rešenje jednačine $F(x) = 0$. Na osnovu prethodnog, formirati iterativni proces za rešavanje jednačine (1).

**Rešenje.** U prethodnom zadatku izložili smo postupak Pronyeve interpolacije, gde smo uočili da je za ovaj postupak potrebno $2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ekvidistantnih interpolacionih tačaka koje, u tom slučaju, potpuno određuju oblik interpolacione funkcije. Međutim, prethodnim fiksiranjem nekih od korena karakteristične jednačine (3) iz zadatka 6.1.36, može se uticati na oblik partikularnih rešenja, tj. na oblik interpolacione funkcije. Modifikaciju Pronyeve interpolacije u ovom smislu zvaćemo dirigovana Pronyeva interpolacija. Ovakva modifikacija omogućuje da se broj interpolacionih čvorova smanji.

Primenimo postupak dirigovane Pronyeve interpolacije. Uzmimo $h = (\beta - \alpha)/2$ i $x_0 = \alpha\,,\ x_1 = \alpha + h\,,\ x_2 = \alpha + 2h = \beta$. Tada je $f_k = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2)$. Izabrani interpolacioni čvorovi su dovoljni za određivanje nepoznatih parametara u interpolacionoj funkciji (2). Zaista, ako za karakterističnu jednačinu (3) iz zadatka 6.1.36 uzmemo

$$(r - 1)(r - r_1) = 0\,,$$

tj.

$$r^2 - (1 + r_1)\, r + r_1 = 0 \qquad (a_1 = r_1\,,\ a_2 = -(1 + r_1))\,, \tag{3}$$

funkcija (1) iz zad. 6.1.36 se svodi na (2), ako je $r_1 > 0$. Kao što ćemo videti, poslednji uslov zahteva monotonost funkcije $f$ na segmentu $[\alpha, \beta]$. Koren $r_1$ karakteristične jednačine (3) lako se dobija iz relacije (2) u zad. 6.1.36, za $k = 0$, tj. iz

$$f_0 r_1 - f_1(1 + r_1) = -f_2\,.$$

Dakle,

$$r_1 = (f_2 - f_1)/(f_1 - f_0) = \Delta f_1/\Delta f_0. \tag{4}$$

Kako je $r_1 > 0$ za monotonu funkciju $f$ imamo

$$F(x) = C_1 + C_2\, r_1^{(x - x_0)/h}\,,$$

gde su, s obzirom na $F(x_k) = f_k$ $(k = 0, 1)$,

$$C_1 = f_0 - \frac{\Delta f_0}{r_1 - 1} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{\Delta f_0}{r_1 - 1}\,. \tag{5}$$

Ako koren jednačine $F(x) = 0$, u oznaci $\bar{x}$, uzmemo za aproksimaciju korena jednačine $f(x) = 0$, dobija se osnovna formula Riddersovog metoda

$$\bar{x} = x_0 + h\,\frac{\log\left(-\dfrac{C_1}{C_2}\right)}{\log r_1}\,. \tag{6}$$

Proces možemo nastaviti tako što sada određujemo novo $h$ kao $h = \min |\bar{x} - x_i|$ $(i = 0, 1, 2)$, te za nove interpolacione tačke uzimamo $x_0 = \bar{x} - h$, $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = \bar{x} + h$, izračunavamo $r_1$ na osnovu (4), $C_1$ i $C_2$ na osnovu (5), a zatim novu aproksimaciju korena na osnovu (6), itd.

*Literatura:*

G. V. Milovanović, M. A. Kovačević, Đ. R. Đorđević: *Iterativno rešavanje nelinearnih jednačina primenom dirigovane Pronyeve interpolacije.* Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Nišu, N°**1** (1980), 163–169.

M. A. Kovačević: *Prilozi teoriji i praksi iterativnih procesa.* Magistarski rad, Niš, 1982.

C. J. Ridders: *Determination of* $F(x) = 0$ *by means of* $p(x) = -A + B\exp(Cx)$. Appl. Math. Modelling, **2** (1978),138.

C. J. Ridders: *Three-point iteration derived from exponential curve fitting.* IEEE Trans. Circuits and Systems, **26** (1979), 669–670.

## 6.2. Problem najboljih aproksimacija

**6.2.1.** Funkciju $x \mapsto f(x) = \cos x$ aproksimirati funkcijom $x \mapsto \Phi(x) = a_0 + a_1 x$ u prostoru: 1° $L^1(0,\, \pi/2)$, 2° $L^2(0,\, \pi/2)$.

**Rešenje.** Definišimo funkciju greške $\delta_1(x) = \cos x - a_0 - a_1 x$ $(0 \le x \le \pi/2)$.

1° Najbolju $L^1(0,\, \pi/2)$ aproksimaciju dobijamo minimizacijom norme

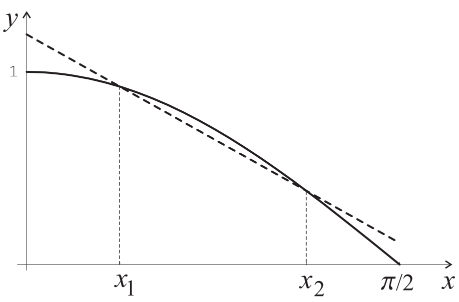
$$J(a_0, a_1) = \|\delta_1\|_1 = \int_0^{\pi/2} |\cos x - a_0 - a_1 x|\, dx\,.$$

Optimalne vrednosti parametara $a_0$ i $a_1$ određujemo iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_0} &= \int_0^{\pi/2} (-1)\,\mathrm{sgn}\,(\cos x - a_0 - a_1 x)\, dx = 0\,, \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} &= \int_0^{\pi/2} (-x)\,\mathrm{sgn}\,(\cos x - a_0 - a_1 x)\, dx = 0\,. \end{aligned}$$

S obzirom da se može uzeti da funkcija $x \mapsto \cos x - a_0 - a_1 x$ menja znak na segmentu $[0,\, \pi/2]$ u tačkama $x_1$ i $x_2$ (videti sl. 1) to se prethodni sistem jednačina svodi na sistem

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}\,, \qquad x_2^2 - x_1^2 = \frac{\pi^2}{8}\,,$$




Sl. 1.

odakle sleduje $x_1 = \pi/8$, $x_2 = 3\pi/8$.

Kako je $\Phi(x_1) = f(x_1)$ i $\Phi(x_2) = f(x_2)$, imamo

$$\Phi(x) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,,$$

tj.

(1) $$\Phi(x) \cong -0.68907\,x + 1.19448\,.$$

2° Najbolju $L^2(0,\,\pi/2)$ aproksimaciju (srednje-kvadratna aproksimacija) dobijamo minimizacijom kvadrata norme funkcije greške

$$I(a_0, a_1) = \|\delta_1\|_2^2 = \int_0^{\pi/2} (\cos x - a_0 - a_1 x)^2\,dx\,.$$

Na osnovu uslova

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial a_0} &= -2\int_0^{\pi/2} (\cos x - a_0 - a_1 x)\,dx = 0\,,\\ \frac{\partial I}{\partial a_1} &= -2\int_0^{\pi/2} x\,(\cos x - a_0 - a_1 x)\;dx = 0\,,\end{aligned}$$

dolazimo do sistema jednačina

$$\begin{aligned}a_0\,\frac{\pi}{2}\; + a_1\,\frac{\pi^2}{8}\; &= 1\,,\\ a_0\,\frac{\pi^2}{8} + a_1\,\frac{\pi^3}{24} &= \frac{\pi}{2} - 1\,,\end{aligned}$$

odakle je $a_0 = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{6}{\pi} - 1\right) \cong 1.15847$, $a_1 = \dfrac{24}{\pi^3}\,(\pi - 4) \cong -0.66444$.

Prema tome,

$$\Phi(x) \cong -0.66444\,x + 1.15847\,. \tag{2}$$

Primećujemo da su aproksimacione funkcije (1) i (2) različite, što je i logično ako se ima u vidu da su one dobijene na osnovu različitih aproksimacionih zahteva.

**6.2.2.** Naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju za funkciju $x \mapsto f(x) = \sin x$, na segmentu $[-\pi,\, \pi]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = 1$, u skupu polinoma stepena ne višeg od tri i izračunati veličinu najbolje aproksimacije.

**Rešenje.** Predstavimo aproksimacionu funkciju u obliku

$$\Phi(x) = C_0 + C_1\,x + C_2\,x^2 + C_3\,x^3\,.$$

Na osnovu neparnosti funkcije $x \mapsto \sin x$ i simetrije segmenta na kome vršimo aproksimaciju, možemo zaključiti da je $C_0 = C_2 = 0$.

Definišimo funkciju greške $\delta_3(x) = f(x) - \Phi(x) = \sin x - C_1\,x - C_3\,x^3$. Najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju dobijamo minimizacijom kvadrata norme funkcije greške

$$I(C_1, C_3) = \|\delta_3\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - C_1\,x - C_3\,x^3)^2\,dx\,.$$

Iz uslova

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial C_1} &= -2\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\sin x - C_1\,x - C_3\,x^3\right)\,dx = 0\,,\\
\frac{\partial I}{\partial C_3} &= -2\int_{-\pi}^{\pi} x^3\left(\sin x - C_1\,x - C_3\,x^3\right)\,dx = 0\,,
\end{aligned}$$

s obzirom da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx &= \int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \pi\,,\\
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin x\,dx &= \int_0^{\pi} x^3\sin x\,dx = \pi^3 - 6\pi\,,
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
C_1\,\frac{\pi^2}{3} + C_3\,\frac{\pi^4}{5} &= 1\,,\\
C_1\,\frac{\pi^4}{5} + C_3\,\frac{\pi^6}{7} &= \pi^2 - 6\,,
\end{aligned}$$

odakle je $C_1 = \dfrac{15}{2\pi^2}\left(\dfrac{21}{\pi^2} - 1\right) \cong 0.85698$, $C_3 = \dfrac{35}{2\pi^4}\left(1 - \dfrac{15}{\pi^2}\right) \cong -0.09339$.

Dakle, aproksimaciona funkcija je data sa

$$\Phi(x) \cong 0.85698\, x - 0.09339\, x^3\,.$$

Veličina najbolje aproksimacije je

$$\|\delta_3\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x - \frac{15}{2\pi^2}\left(\frac{21}{\pi^2} - 1\right) x - \frac{35}{2\pi^4}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right) x^3\right)^2 dx \cong 0.0088\,,$$

što se dobija posle dosta zametnog posla.

Postavljeni problem možemo rešiti i na drugi način. Uvedimo transformaciju

$$x = \pi\, t$$

koja prevodi segment $[-\pi,\, \pi]$ po $x$, na segment $[-1, 1]$ po $t$.

Izvršimo sada srednje-kvadratnu aproksimaciju funkcije $t \mapsto F(t) = f(\pi t) = \sin \pi t$ na segmentu $[-1, 1]$ $(p(\pi t) = 1)$, aproksimacionom funkcijom

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{3} a_n\, P_n(t)\,,$$

gde su $P_n$ Legendreovi polinomi koji su ortogonalni na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $t \mapsto p(t) = 1$. S obzirom na tu činjenicu, koeficijente $a_n$ određujemo na osnovu

$$a_n = \frac{(F, P_n)}{(P_n, P_n)} \qquad n = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1}$$

(videti [2, str. 94]), gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(-1, 1)$ definisan sa

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt \qquad (f, g \in L^2(-1, 1))\,.$$

Kako je

$$(P_n, P_n) = \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \dots)\,,$$

(videti [4, str. 21]), na osnovu (1) imamo

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin \pi t\, dt = 0\,, \qquad a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t \sin \pi t\, dt = \frac{3}{\pi}\,,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) \sin \pi t\, dt = 0\,,$$

$$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right) \sin \pi t\, dt = \frac{7}{\pi}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right)\,,$$

pa je aproksimaciona funkcija po $x$ data sa

$$\begin{aligned}
\sin x \sim \varphi\left(\frac{x}{\pi}\right) &= \frac{3}{\pi} P_1\left(\frac{x}{\pi}\right) + \frac{7}{\pi}\left(1 - \frac{35}{\pi^2}\right) P_3\left(\frac{x}{\pi}\right) \\
&= \frac{3}{\pi}\,\frac{x}{\pi} + \frac{7}{\pi}\left(1 - \frac{35}{\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(5\,\frac{x^3}{\pi^3} - 3\,\frac{x}{\pi}\right) \\
&= \frac{15}{2\pi^2}\left(\frac{21}{\pi^2} - 1\right) x + \frac{35}{2\pi^4}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right) x^3 \\
&\cong 0.85698\,x - 0.09339\,x^3\,.
\end{aligned}$$

Veličina najbolje aproksimacije je

$$\begin{aligned}
\|\delta_3\|_2^2 &= (F, F) - \sum_{n=0}^{3} a_n^2\,(P_n, P_n) \\
&= \int_{-1}^{1} (\sin \pi t)^2\,dt - \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{49}{\pi^2}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right)^2\cdot\frac{2}{7} \cong 0.0088
\end{aligned}$$

(videti [2, str. 96]), s obzirom da je

$$\int_{-1}^{1} (\sin \pi t)^2\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1 - \cos 2\pi t}{2}\,dt = 1\,.$$

Uporedimo sada ova dva postupka.

Videli smo da u postupku 1 dolazimo do sistema linearnih jednačina iz koga određujemo nepoznate koeficijente, dok kod postupka 2, kada se koriste odgovarajući ortogonalni polinomi (bilo da su klasični ili konstruisani Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije), dobijamo direktno nepoznate koeficijente. Dakle, korišćenjem postupka 2 oslobođeni smo rešavanja sistema linearnih jednačina.

Ukoliko bi se, eventualno, pojavila potreba za boljom srednjekvadratnom aproksimacionom funkcijom u odnosu na već dobijenu, postupak 1 je takav da se prethodni rezultati ne bi mogli iskoristiti, tj. postupak bi se morao obnoviti, dok bi se, pri korišćenju postupka 2, samo izvršilo dodatno izračunavanje novih koeficijenata.

Najzad, veličina najbolje aproksimacije se mnogo jednostavnije (efikasnije) izračunava korišćenjem postupka 2.

**6.2.3.** U skupu polinoma stepena ne višeg od $m$, naći najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = |x|$, na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = 1$.

**Rešenje.** Aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \, P_k(x) \, ,$$

gde su $P_k$ Legendreovi polinomi koji su ortogonalni na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = 1$. S obzirom na tu činjenicu, koeficijente $a_k$ određujemo na osnovu

$$\text{(1)} \qquad a_k = \frac{(f, P_k)}{(P_k, P_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots , m) \, .$$

(videti [2, str. 94]), gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(-1, 1)$ definisan sa

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) \, g(x) \, dx \qquad (f, g \in L^2(-1, 1)) \, .$$

Kako je $P_0(x) = 1$ i

$$(P_k, P_k) = \|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1} \qquad (k = 0, 1, \dots ) \, ,$$

na osnovu (1) imamo

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| \, dx = \int_{0}^{1} x \, dx = \frac{1}{2} \, ,$$

$$\text{(2)} \qquad a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} |x| \, P_k(x) \, dx \qquad (k = 1, 2, \dots , m) \, .$$

Kako su funkcije $x \mapsto |x|$ i $x \mapsto P_{2n}(x)$ parne, a funkcija $x \mapsto P_{2n-1}(x)$ neparna, na osnovu (2) imamo $a_k = a_{2n-1} = 0$, a za $k = 2n$

$$\text{(3)} \qquad a_{2n} = \frac{4n+1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{1} x \, P_{2n}(x) \, dx = (4n+1) \int_{0}^{1} x \, P_{2n}(x) \, dx \, .$$

Iz Bonnetove relacije

$$(2k+1) \, x \, P_k(x) = (k+1) \, P_{k+1}(x) + k \, P_{k-1}(x)$$

i Christoffelove relacije

$$(2k+1) \, P_k(x) = P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x) \, ,$$

(videti [4, str. 19–20]), nalazimo

$$(2k+1)\,x\,P_k(x) = \frac{k+1}{2k+3}\bigl(P'_{k+2}(x) - P'_k(x)\bigr) + \frac{k}{2k-1}\bigl(P'_k(x) - P'_{k-2}(x)\bigr)\,,$$

tj. za $k = 2n$,

$$(4n+1)\,x\,P_{2n}(x) = \frac{2n+1}{4n+3}\bigl(P'_{2n+2}(x) - P'_{2n}(x)\bigr) + \frac{2n}{4n-1}\bigl(P'_{2n}(x) - P'_{2n-2}(x)\bigr)\,.$$

Zamenom u (3) dobijamo

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{2n+1}{4n+3}\left(P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x)\right)\Big|_0^1 + \frac{2n}{4n-1}\left(P_{2n}(x) - P_{2n-2}(x)\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2n+1}{4n+3}\left(P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)\right) - \frac{2n}{4n-1}\left(P_{2n}(0) - P_{2n-2}(0)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-3)!}{(2n+2)!!} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!\,(n-1)!}\,,
\end{aligned}$$

s obzirom da je $P_{2n}(1) = 1$ i $P_{2n}(0) = \binom{-1/2}{n} = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Dakle, aproksimaciona funkcija je data sa

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{[m/2]} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!\,(n-1)!}\,P_{2n}(x) \qquad (|x| \le 1).$$

**6.2.4.** Za funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x^2}$ naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na segmentu $[-1, 1]$, sa težinom $x \mapsto p(x) = \bigl(1-x^2\bigr)^{-1/2}$, u skupu polinoma stepena ne višeg od $m$-tog ($m \in \mathbb{N}$).

**Rešenje.** Predstavimo aproksimacionu funkciju $\Phi$ u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\,T_k(x)\,,$$

gde su $T_k(x)$ Čebiševljevi polinomi koji su ortogonalni na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $p(x) = \bigl(1-x^2\bigr)^{-1/2}$. S obzirom na tu činjenicu, koeficijente $a_k$ određujemo na osnovu

(1) $$a_k = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

(videti [2, str. 94]), gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(-1,1)$ definisan sa

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)g(x)\,dx \qquad (f,g\in L^2(-1,1))\,.$$

Kako je $T_0(x)=1$ i

$$(T_k,T_k)=\|T_k\|^2=\begin{cases}\pi & k=0\,,\\ \dfrac{\pi}{2} & k\neq 0\,,\end{cases}$$

(videti [4, str. 82]), na osnovu (1), imamo

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\,,$$

$$\text{(2)}\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\sqrt{1-x^2}\,T_k(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}T_k(x)\,dx \quad (k=1,\dots,m).$$

S obzirom da je $x\mapsto T_{2n-1}(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ neparna funkcija, to na osnovu (2) sleduje da za $k=2n-1$ su $a_k=a_{2n-1}=0$. (Ovo smo i unapred mogli zaključiti s obzirom na simetriju problema.)

Kako je

$$T_k(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\,\frac{d}{dx}\,T_{k+1}(x)-\frac{1}{k-1}\,\frac{d}{dx}\,T_{k-1}(x)\right) \qquad (k\geq 2)$$

(videti [4, str. 80]), na osnovu (2) i parnosti funkcije $x\mapsto T_{2n}(x)$, za $k=2n$ imamo

$$a_{2n}=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}T_{2n}(x)\,dx=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1}-\frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}\right)\bigg|_{x=1}\,,$$

tj.

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)=-\frac{4}{\pi\,(4n^2-1)}\,.$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{[m/2]}\frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1} \qquad (|x|\leq 1)\,.$$

Na primer, za $m=5$ imamo

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{3}\,T_2(x)+\frac{1}{15}\,T_4(x)\right]=\frac{2}{15\pi}\,[15-10\,T_2(x)-2\,T_4(x)]\,,$$

ili, s obzirom da je $T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$

$$\Phi(x) = \frac{2}{15\pi}\left(23 - 4x^2 - 16x^4\right).$$

**6.2.5.** U skupu polinoma stepena ne višeg od $m$, naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = \arcsin x$ na segmentu $[-1,1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$.

**Rešenje.** Aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, T_k(x)\,,$$

gde su $T_k$ Čebiševljevi polinomi, a koeficijente $a_k$ određujemo na osnovu

$$a_k = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)\,. \tag{1}$$

S obzirom da je $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$ i

$$(T_k, T_k) = \|T_k\|^2 = \begin{cases} \pi & k = 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & k \neq 0\,, \end{cases}$$

na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx = 0\,, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \cos(k \cdot \arccos x)\, dx \quad (k = 1, \ldots, m)\,. \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $t = \arccos x$, pri čemu je

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \frac{\pi}{2} - t\,, \qquad dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$$\arccos(-1) = \pi, \qquad \arccos 1 = 0,$$

poslednji integral postaje

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos kt\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2}\left(1 - (-1)^k\right) \qquad (k = 1, \ldots).$$

Dakle, za $k = 2n - 1$ je $a_{2n-1} = \dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$, a za $k = 2n$ je $a_{2n} = 0$, pa je aproksimaciona funkcija

$$\Phi(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{[(m+1)/2]} \frac{1}{(2n-1)^2} T_{2n-1}(x) \qquad (|x| \le 1)\,.$$

**6.2.6.** U skupu polinoma stepena ne višeg od $m$, naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = |x|$, na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = \big(1 - x^2\big)^{-1/2}$.

**Rešenje.** Ako aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo u obliku

$$f(x) \sim \Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, T_k(x)\,,$$

gde su $T_k(x)$ Čebiševljevi polinomi, koeficijente $a_k$ određujemo na osnovu

$$a_k = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)\,. \tag{1}$$

Kako je $T_0(x) = 1$ i

$$(T_k, T_k) = \|T_k\|^2 = \begin{cases} \pi & k = 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & k \neq 0\,, \end{cases}$$

na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 0\,, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, |x|\, T_k(x)\, dx \quad (k = 1, \ldots, m)\,. \end{aligned}$$

S obzirom na parnost funkcija $x \mapsto |x|$, $x \mapsto T_{2n}(x)$ i neparnost funkcije $x \mapsto T_{2n-1}(x)$, dobijamo

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\,\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\,, \\ &a_{2n-1} = 0\,, \\ &a_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, T_{2n}(x)\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cos(2n \arccos x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $x = \cos\theta$, poslednji integral se svodi na

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\cos 2n\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\cos(2n+1)\theta + \cos(2n-1)\theta\right] d\theta, \end{aligned}$$

tj.

$$a_{2n} = -\frac{4(-1)^n}{\pi\,(4n^2-1)} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{[m/2]} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\, T_{2n}(x) \qquad (|x| \le 1)\,.$$

**6.2.7.** U skupu polinoma stepena ne višeg od pet, naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2}$, na segmentu $[-1,1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2}$.

**Rešenje 1.** U prostoru $L^2(-1,1)$, u kome je skalarni proizvod uveden pomoću

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)g(x)\, dx \qquad (f, g \in L^2(-1,1))\,,$$

odredićemo prvih pet članova ortogonalnog sistema $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Izračunajmo najpre integral

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^n\sqrt{1-x^2}\, dx \qquad (n = 0, 1, \dots)\,. \tag{1}$$

Za $n = 2k-1$ je $I_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, s obzirom na neparnost podintegralne funkcije.

Za $n = 2k$, na osnovu (1) imamo

$$I_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{2k}\sqrt{1-x^2}\, dx \qquad (k = 1, 2, \dots)\,.$$

Primenom parcijalne integracije, pri čemu uzimamo $u = x^{2k-1}$, $dv = x\sqrt{1-x^2}\, dx$ $\left(du = (2k-1)x^{2k-2}\, dx,\ v = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\right)$, poslednji integral postaje

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{3}\int_{-1}^{1} x^{2k-2}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \frac{2k-1}{3}\, I_{2k-2} - \frac{2k-1}{3}\, I_{2k}\,, \end{aligned}$$

odakle je

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k+2}\, I_{2k-2}\,.$$

S obzirom da je $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, imamo $I_{2k} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}\,\pi$ i $I_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Polazeći od prirodnog bazisa $\{1, x, x^2, \dots\}$ Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije (videti [1, str. 90–91]) nalazimo redom

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= 1\,,\\
Q_1(x) &= x - \frac{(x, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0 = x\,,\\
Q_2(x) &= x^2 - \frac{(x^2, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0 - \frac{(x^2, Q_1)}{(Q_1, Q_1)}\, Q_1 = x^2 - I_2 I_0^{-1} = x^2 - \frac{1}{4}\,,\\
Q_3(x) &= x^3 - \frac{(x^3, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0 - \frac{(x^3, Q_1)}{(Q_1, Q_1)}\, Q_1 - \frac{(x^3, Q_2)}{(Q_2, Q_2)}\, Q_2\\
&= x^3 - I_4 I_2^{-1}\, x = x^3 - \frac{1}{2}\, x\,,\\
Q_4(x) &= x^4 - \frac{(x^4, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0 - \frac{(x^4, Q_1)}{(Q_1, Q_1)}\, Q_1 - \frac{(x^4, Q_2)}{(Q_2, Q_2)}\, Q_2 - \frac{(x^4, Q_3)}{(Q_3, Q_3)}\, Q_3\\
&= x^4 - \frac{3}{4}\, x^2 + \frac{1}{16}\,.
\end{aligned}$$

Aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo sada u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k\, Q_k(x)\,,$$

pri čemu su

$$a_k = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots, 5)\,. \tag{2}$$

S obzirom na simetriju aproksimacionog problema, možemo zaključiti da su koeficijenti sa neparnim indeksima jednaki nuli, tj. $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Kako su

$$\begin{aligned}
&(f, Q_0) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}, \quad (f, Q_2) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)\, dx = -\frac{1}{15}\,,\\
&(f, Q_4) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\Big(x^4 - \frac{3}{4}\, x^2 + \frac{1}{16}\Big)\, dx = -\frac{1}{420}\,,\\
&(Q_0, Q_0) = I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (Q_2, Q_2) = I_4 - \frac{1}{2}\, I_2 + \frac{1}{16}\, I_0 = \frac{\pi}{32}\,,\\
&(Q_4, Q_4) = I_8 - \frac{3}{2}\, I_6 + \frac{11}{16}\, I_4 - \frac{3}{32}\, I_2 + \frac{1}{256}\, I_0 = \frac{\pi}{512}\,,
\end{aligned}$$

na osnovu (2), imamo $a_0 = \dfrac{8}{3\pi}$, $a_2 = -\dfrac{32}{15\pi}$, $a_4 = -\dfrac{128}{105\pi}$.

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{8}{3\pi} - \frac{32}{15\pi}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{128}{105\pi}\left(x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}\right)\\ &= \frac{328}{105\pi} - \frac{128}{105\pi}x^2\left(1 + x^2\right).\end{aligned}$$

**Rešenje 2.** Predstavimo aproksimacionu funkciju $\Phi$ u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k\, S_k(x)\,,$$

gde su $S_k$ Čebiševljevi polinomi druge vrste koji su ortogonalni na segmentu $[-1,1]$ sa težinom $x \mapsto p(x) = \sqrt{1-x^2}$. S obzirom na tu činjenicu, koeficijente $C_k$ određujemo na osnovu

$$C_k = \frac{(f, S_k)}{(S_k, S_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots, m)\,, \tag{3}$$

gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(-1,1)$ definisan sa

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, g(x)\, dx \qquad (f, g \in L^2(-1,1))\,.$$

Kako je $S_k(x) = \dfrac{\sin\left((k+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ i

$$(S_k, S_k) = \|S_k\|^2 = \frac{\pi}{2}\,,$$

na osnovu (3) imamo

$$C_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \sin\left((k+1)\arccos x\right)\, dx\,.$$

Uvođenjem smene $x = \cos\theta$, dobijamo

$$\begin{aligned}C_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k+1)\theta\, \sin^2\theta\, d\theta\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k+1)\theta\, \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k+1)\theta\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin(k+3)\theta + \sin(k-1)\theta\right]\, d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-(-1)^{k+3}}{k+3} + \frac{1-(-1)^{k-1}}{k-1}\right] \qquad (k \neq 1)\end{aligned}$$

i $C_1 = 0$. Na osnovu ovoga nalazimo da je za $k = 2n+1$, $C_{2n+1} = 0$, a za $k = 2n$,

$$C_{2n} = \frac{-8}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\pi} \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\text{(4)} \qquad \Phi(x) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{1}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)} S_{2n}(x) \qquad (|x| \le 1).$$

Za Čebiševljeve polinome druge vrste $S_n$ važi ista rekurentna relacija kao i za Čebiševljeve polinome prve vrste $T_n$, tj.

$$S_{n+1}(x) = 2x\, S_n(x) - S_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

pri čemu je $S_0 = 1$, $S_1 = 2x$, pa nalazimo $S_2 = 4x^2 - 1$, $S_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1$. Na osnovu (4), za $m = 5$, dobijamo

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{8}{3\pi} - \frac{8}{15\pi}\bigl(4x^2 - 1\bigr) - \frac{8}{105\pi}\bigl(16x^4 - 12x^2 + 1\bigr)\\ &= \frac{328}{105\pi} - \frac{128}{105\pi}\, x^2\bigl(1 + x^2\bigr).\end{aligned}$$

**6.2.8.** U skupu polinoma stepena ne višeg od $m$, naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$, na intervalu $(0, +\infty)$ sa težinom $x \mapsto e^{-x}$.

**Rešenje.** Predstavimo aproksimacionu funkciju $\Phi$ u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{m} C_n\, L_n(x),$$

gde su $L_n(x)$ Laguerreovi polinomi koji su ortogonalni na intervalu $(0, +\infty)$ sa težinom $x \mapsto e^{-x}$. S obzirom na tu činjenicu, koeficijente $C_n$ određujemo na osnovu

$$\text{(1)} \qquad C_n = \frac{(f, L_n)}{(L_n, L_n)} \qquad (n = 0, 1, \dots, m),$$

(videti [2, str. 94]), gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(0, +\infty)$ definisan sa

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x)\, dx \qquad (f, g \in L^2(0, +\infty)).$$

Kako je

$$(L_n, L_n) = \|L_n\|^2 = (n!)^2 ,$$

(videti [4, str. 49]), na osnovu (1) imamo

$$C_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ax} L_n(x)\, dx ,$$

tj.

$$C_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^n}{dx^n} \Big( x^n e^{-x} \Big)\, dx , \tag{2}$$

s obzirom da je (videti [4, str. 45])

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} \Big( x^n e^{-x} \Big) .$$

Primenom parcijalne integracije $n$ puta, pri čemu se uzima $u = e^{-ax}$, $dv = \dfrac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} \big( x^n e^{-x} \big)$ $(k = 1, 2, \ldots , n)$, formula (2) postaje

$$C_n = \frac{a^n}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} x^n\, dx . \tag{3}$$

Ako se na (3) opet primeni parcijalna integracija $n$ puta, pri čemu se uzima $u = x^k$ $(k = n, n-1, \ldots , 1)$, $dv = e^{-(a+1)x}\, dx$, dobija se

$$C_n = \frac{a^n}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{(a+1)^n} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{n!} \left( \frac{a}{a+1} \right)^n \frac{1}{a+1} .$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\Phi(x) = \frac{1}{a+1} \sum_{n=0}^{m} \left( \frac{a}{a+1} \right)^n \frac{L_n(x)}{n!} \qquad (x \in (0, +\infty)) .$$

**6.2.9.** Za funkciju $x \mapsto f(x) = x e^{x^2/4}$ naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na intervalu $(-\infty, +\infty)$ sa težinom $x \mapsto p(x) = e^{-x^2}$, u skupu polinoma stepena ne višeg od $m$.

**Rešenje.** Predstavimo aproksimacionu funkciju $\Phi$ u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k\, H_k(x) , \tag{1}$$

gde su $H_k$ Hermiteovi polinomi koji su ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ sa težinom $x \mapsto p(x) = e^{-x^2}$. S obzirom na tu činjenicu koeficijente $C_k$ određujemo na osnovu

$$C_k = \frac{(f, H_k)}{(H_k, H_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)\,, \tag{2}$$

(videti [2, str. 94]), gde je skalarni proizvod u prostoru $L^2(-\infty, +\infty)$ definisan sa

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, g(x)\, dx \qquad (f, g \in L^2(-\infty, \infty))\,.$$

Kako je funkcija $f$ neparna, zaključujemo da je u (1), $C_{2n} = 0$ $(n = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right])$, pa je

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{[(m-1)/2]} C_{2n+1}\, H_{2n+1}(x)\,.$$

U cilju nalaženja koeficijenata $C_{2n+1}$, izračunajmo najpre integral

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} H_{2n}(x)\, dx \qquad (\alpha > 0)\,.$$

Korišćenjem parcijalne integracije, pri čemu uzimamo

$$u = e^{-\alpha x^2}, \quad dv = H_{2n}(x)\, dx\,,$$

pa je $du = -2\alpha\, x\, e^{-x^2} dx$, $v = \dfrac{H_{2n+1}(x)}{2\,(2n+1)}$ (s obzirom da je $2(k+1)\, H_k(x) = H'_{k+1}(x)$ (videti [4, str. 60])), dobijamo

$$I_{2n} = \frac{\alpha}{(2n+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} H_{2n+1}\, dx.$$

Kako je

$$2x\, H_k(x) = 2k\, H_{k-1}(x) + H_{k+1}(x)\,,$$

(videti [4, str. 61]), tj. za $k = 2n + 1$

$$x\, H_{2n+1}(x) = (2n+1)\, H_{2n}(x) + \frac{1}{2}\, H_{2n+2}(x)\,, \tag{3}$$

poslednji integral postaje

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{\alpha}{2n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \Big[(2n+1)\, H_{2n}(x) + \frac{1}{2}\, H_{2n+2}(x)\Big] dx \\ &= \alpha\, I_{2n} + \frac{\alpha}{2\,(2n+1)}\, I_{2n+2}\,, \end{aligned}$$

odakle je

$$I_{2n+2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\, 2\,(2n+1)\, I_{2n}\,. \tag{4}$$

S obzirom da je

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,,$$

na osnovu (4) dobijamo

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, H_{2n}(x)\, dx \qquad (\alpha > 0) \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n 2^n (2n-1)!!\, \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Izračunajmo sada skalarni proizvod

$$(f, H_{2n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, x\, e^{x^2/4}\, H_{2n+1}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-3x^2/4}\, H_{2n+1}(x)\, dx\,,$$

ili opštije

$$J_{2n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\, H_{2n+1}(x)\, dx \qquad (\alpha > 0)\,.$$

Korišćenjem relacije (3), imamo

$$\begin{aligned} J_{2n+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \left[(2n+1)\, H_{2n}(x) + \frac{1}{2}\, H_{2n+2}(x)\right] dx \\ &= (2n+1)\, I_{2n} + \frac{1}{2}\, I_{2n+2}\,, \end{aligned}$$

pa na osnovu (5), dobijamo

$$J_{2n+1} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n \frac{(2n+1)!}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,. \tag{6}$$

S obzirom da je

$$(H_k, H_k) = \|H_k\|^2 = 2^k\, k!\, \sqrt{\pi}\,,$$

na osnovu (2) i korišćenjem relacije (6) za $\alpha = 3/4$, dobijamo

$$C_{2n+1} = \frac{4\sqrt{3}}{9 \cdot 12^n\, n!} \qquad (n = 0, 1, \dots)\,.$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \sum_{n=0}^{[(m-1)/2]} \frac{1}{12^n\, n!} H_{2n+1}(x) \qquad (x \in (-\infty, +\infty))\,.$$

**6.2.10.** Funkciju $f(x) = x - x^2$ aproksimirati na intervalu $(-\infty, \infty)$ algebarskim polinomom stepena ne višeg od prvog srednje-kvadratnom aproksimacijom sa težinom $p(x) = e^{-x^2}$.

**Rešenje 1.** Označimo sa $P(x)$ traženi polinom najbolje srednje-kvadratne aproksimacije. Tada je

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x),$$

gde su $H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x$ Hermiteovi ortogonalni polinomi.

Kako je

$$(f, H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (x - x^2)\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ (f, H_1) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x(x - x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$$

i

$$\|H_0\|^2 = \sqrt{\pi}, \quad \|H_1\|^2 = 2\sqrt{\pi},$$

imamo da je

$$a_0 = \frac{(f, H_0)}{\|H_0\|^2} = -\frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{(f, H_1)}{\|H_1\|^2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$P(x) = -\frac{1}{2} + x.$$

**Rešenje 2.** Prva tri člana Hermiteovih ortogonalnih polinoma su

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Ako prirodni bazis polinoma izrazimo preko Hermiteovog bazisa, tj. stepene $x^k$ izrazimo pomoću Hermiteovih polinoma, imamo

$$1 = H_0, \quad x = \frac{1}{2} H_1, \quad x^2 = \frac{1}{4}(H_2 + 2H_0).$$

Sada je

$$f(x) = x - x^2 = -\frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H_1 - \frac{1}{4} H_2. \tag{1}$$

Kako je aproksimacioni polinom $P(x)$ prvog stepena, odbacivanjem poslednjeg člana iz (1) dobijamo

$$P(x) = -\frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2}H_1 = -\frac{1}{2} + x.$$

**6.2.11.** Za funkciju $x \mapsto \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na intervalu $(-\infty, +\infty)$ sa težinom $x \mapsto p(x) = e^{-x^2}$, u skupu polinoma stepena ne višeg od $m$.

**Rešenje.** S obzirom na neparnost funkcije $f$, aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo u obliku

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{[(m-1)/2]} C_{2n+1}\, H_{2n+1}(x)\,,$$

gde su $H_{2n+1}$ Hermiteovi polinomi. Koeficijente $C_{2n+1}$ određujemo na osnovu

$$C_{2n+1} = \frac{(f, H_{2n+1})}{(H_{2n+1}, H_{2n+1})}\,. \tag{1}$$

Izračunajmo skalarni proizvod

$$(f, H_{2n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \right) H_{2n+1}(x)\,dx\,.$$

Primenimo postupak parcijalne integracije, pri čemu uzimamo

$$u = \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad dv = e^{-x^2}\, H_{2n+1}(x)\,dx\,,$$

pa je $du = e^{-x^2}\,dx$ i

$$v = \int e^{-x^2}\, H_{2n+1}(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Ako saberemo rekurentne relacije

$$2x\,H_k(x) - 2k\,H_{k-1}(x) = H_{k+1}(x)\,, \qquad 2k\,H_{k-1}(x) = H_k'(x)\,,$$

koje važe za Hermiteove polinome (videti [4, str. 60–61]), dobijamo

$$2x\,H_k(x) = H_k'(x) + H_{k+1}(x)\,.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa $e^{-x^2}$, nalazimo

$$e^{-x^2} H_{k+1}(x) = -\left(e^{-x^2} H_k(x)\right)',$$

pa je, na osnovu (2), $v = -e^{-x^2} H_{2n}(x)$. Sada je

$$(f, H_{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} H_{2n}(x)\, dx\,,$$

a dalje, na osnovu (5) iz zadatka 6.2.9, dobijamo

$$(f, H_{2n+1}) = \sqrt{2} \cdot \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n\, n!}\,. \tag{3}$$

S obzirom da je

$$(H_k, H_k) = \|H_k\|^2 = 2^k\, k!\, \sqrt{\pi}\,,$$

na osnovu (1) i (3), nalazimo

$$C_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{8^n\, n!\, (2n+1)}\,.$$

Dakle, aproksimaciona funkcija $\Phi$ je data sa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^n}{8^n\, n!\, (2n+1)} H_{2n+1}(x)\,.$$

S obzirom da je

$$H_1(x) = 2x\,, \quad H_3(x) = 8\,x^3 - 12\,x\,, \quad H_5(x) = 32\,x^5 - 160\,x^3 + 120\,x\,,$$

za $m = 1, 3, 5$ dobijamo sledeće aproksimacije

$$\begin{aligned}
\operatorname{erf}(x) &\cong \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}\,,\\
\operatorname{erf}(x) &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{5}{2}\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right),\\
\operatorname{erf}(x) &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{43}{16}\,x - \frac{7}{12}\,x^3 + \frac{1}{20}\,x^5\right).
\end{aligned}$$

**Napomena.** Bilo koja polinomska aproksimacija funkcije $\operatorname{erf}(x)$ nije dobra za veliko $|x|$, s obzirom da svaki polinom teži beskonačnosti kada $x \to +\infty$. U numeričkim postupcima vrlo često se koriste sledeće aproksimacije za $\operatorname{erf}(x)$, kada $x \in [0, +\infty)$:

a) $\operatorname{erf}(x) = 1 - \big(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\big)e^{-x^2} + \varepsilon_1(x)$,

gde su $t = 1/(1 + px)$, $p = 0.47047$,

$$a_1 = 0.3480242, \quad a_2 = -0.0958798, \quad a_3 = 0.7478556,$$

pri čemu je $|\varepsilon_1(x)| \le 2.5 \cdot 10^{-5}$;

b) $\operatorname{erf}(x) = 1 - \big(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\big)e^{-x^2} + \varepsilon_2(x)$,

gde su $t = 1/(1 + px)$, $p = 0.3275911$,

$$b_1 = 0.254829592, \quad b_2 = -0.284496736, \quad b_3 = 1.421413741,$$

$$b_4 = -1.453152027, \quad b_5 = 1.061405429,$$

pri čemu je $|\varepsilon_2(x)| \le 1.5 \cdot 10^{-7}$.

*Literatura:*

C. Hastings, Jr.: *Approximations for digital computers.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1955.

M. Abramovitz, I. A. Stegun: *Hanbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* Dover Publications, New York, 1972.

**6.2.12.** Polazeći od bazisa $\{1, x, x^2\}$, primenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, konstruisati sistem polinoma $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ ortogonalnih na segmentu $[0, 1]$.

Koristeći se dobijenim ortogonalnim bazisom, funkciju $x \mapsto f(x) = x^4$ aproksimirati polinomom drugog stepena u prostoru $L^2(0, 1)$.

**Rešenje.** U prostoru $L^2(0, 1)$ definišimo skalarni proizvod pomoću

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad (f, g \in L^2(0, 1))\,.$$

Polazeći od bazisa $\{1, x, x^2\}$, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije (videti [1, str. 90–91]) nalazimo redom

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) &= 1\,,\\
\Phi_1(x) &= x - \frac{(x, \Phi_0)}{(\Phi_0, \Phi_0)}\,\Phi_0 = x - \frac{1}{2}\,,\\
\Phi_2(x) &= x^2 - \frac{(x^2, \Phi_0)}{(\Phi_0, \Phi_0)}\,\Phi_0 - \frac{(x^2, \Phi_1)}{(\Phi_1, \Phi_1)}\,\Phi_1 = x^2 - x + \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Aproksimacionu funkciju $\Phi$ predstavimo, sada, u obliku

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{2} a_k\,\Phi_k\,,$$

pri čemu je

$$a_k=\frac{\left(x^4,\Phi_k\right)}{(\Phi_k,\Phi_k)}\qquad (k=0,1,2)\,. \tag{1}$$

S obzirom da je

$$\begin{aligned}
\left(x^4,\Phi_0\right)&=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}\,,\\
\left(x^4,\Phi_1\right)&=\int_0^1 x^4\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{15}\,,\\
\left(x^4,\Phi_2\right)&=\int_0^1 x^4\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\frac{1}{105}\,,\\
(\Phi_0,\Phi_0)&=\int_0^1 dx=1\,,\\
(\Phi_1,\Phi_1)&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}\,,\\
(\Phi_2,\Phi_2)&=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx=\frac{1}{180}\,,
\end{aligned}$$

na osnovu (1), imamo $a_0=\dfrac{1}{5}$, $a_1=\dfrac{4}{5}$, $a_2=\dfrac{12}{7}$, pa je

$$\Phi(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{12}{7}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{35}\left(60\,x^2-32\,x+3\right)\,.$$

**6.2.13.** Data je težinska funkcija $p(x)=|x|(1-x^2)$ na $[-1,1]$.

a) Konstruisati odgovarajući ortogonalni niz polinoma $Q_0,\ldots,Q_4$.

b) Za funkciju $f(x)=1-|x|$ na $[-1,1]$ naći srednje-kvadratnu aproksimaciju sa datom težinskom funkcijom u skupu polinoma ne većeg stepena od četiri.

**Rešenje.** a) Polazeći od prirodnog bazisa $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ i korišćenjem Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije nalazimo tražene ortogonalne polinome

$$Q_0(x)=1,\quad Q_1(x)=x,\quad Q_2(x)=x^2-\frac{1}{3},\quad Q_3(x)=x^3-\frac{1}{2}x,$$
$$Q_4(x)=x^4-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{10}.$$

Pri određivanju ovih polinoma koristimo definiciju skalarnog proizvoda

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}|x|(1-x^2)f(x)g(x)\,dx$$

i (ne)parnost podintegralnih funkcija.

b) Aproksimacionu funkciju potražimo u obliku

$$\phi(x)=\sum_{i=0}^{4}a_i\phi_i=\sum_{i=0}^{4}Q_i(x),$$

gde koeficijente $a_i$ izračunavamo pomoću formula

$$a_i=\frac{(f,Q_i)}{Q_i,Q_i)}\quad (i=0,1,2,3,4).$$

S obzirom da je

$$(f,Q_0)=\frac{7}{30}\cong 0.23333,\quad (f,Q_1)=0,\quad (f,Q_2)=-\frac{8}{315}\cong -0.0254,$$
$$(f,Q_3)=0,\quad (f,Q_4)=\frac{2}{1575}\cong 0.00127,$$
$$(Q_0,Q_0)=\frac{1}{2}=0.5,\quad (Q_1,Q_1)=\frac{1}{6}\cong 0.16667,\quad (Q_2,Q_2)=\frac{1}{36}\cong 0.02778,$$
$$(Q_3,Q_3)=\frac{1}{120}\cong 0.00833,\quad (Q_4,Q_4)=\frac{1}{600}\cong 0.00167,$$

to je

$$a_0=\frac{7}{15}\cong 0.46667,\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{32}{35}\cong -0.91429,$$
$$a_3=0,\quad a_4=\frac{16}{21}\cong 0.7619.$$

Tražena aproksimaciona funkcija je

$$\phi(x)=\frac{16}{21}x^4-\frac{32}{21}x^2+\frac{89}{105}\cong 0.7619x^4-1.5238x^2+0.8476.$$

**6.2.14.** Za funkciju $f(x)=\sqrt[m]{|x|}$, $m\in\mathbb{N}$, u intervalu $[-1,1]$ naći najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju u skupu polinoma ne višeg stepena od dva. Naći veličinu najbolje aproksimacije i njenu graničnu vrednost kada $m\to+\infty$.

**Rešenje.** Potražimo aproksimacionu funkciju $\phi$ u obliku

$$\phi(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x),$$

gde su

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Legendreovi polinomi. Koeficijente $a_k$ izračunavamo po formuli

$$a_k = \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|^2}, \; k = 0, 1, 2.$$

S obzirom da je

$$(f, P_0) = \frac{2m}{m+1}, \quad (f, P_1) = 0, \quad (f, P_2) = \frac{2m}{(m+1)(3m+1)},$$

i kako je $\|P_k\|^2 = 2/(2k+1)$, to je

$$\|P_0\|^2 = 2, \quad \|P_1\|^2 = \frac{2}{3}, \quad \|P_2\|^2 = \frac{2}{5}.$$

Dakle, koeficijenti su određeni sa

$$a_0 = \frac{m}{m+1}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{5m}{(m+1)(3m+1)}.$$

Aproksimaciona funkcija je

$$\phi(x) = \frac{15m}{2(m+1)(3m+1)} x^2 + \frac{3m(2m-1)}{2(m+1)(3m+1)} = A_1 x^2 + A_0.$$

Odredićemo sada i veličinu najbolje aproksimacije. Kako je

$$\delta(x) = f(x) - \phi(x) = \sqrt[m]{|x|} - A_1 x^2 - A_0,$$

imamo

$$\delta(x)^2 = \sqrt[m]{x^2} + A_1^2 x^4 + A_0^2 - 2A_1 x^2 \sqrt[m]{|x|} - 2A_0 \sqrt[m]{|x|} + 2A_0 A_1 x^2,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\|\delta(x)\|^2 &= \int_{-1}^{1} \delta(x)^2 dx = 2 \int_0^1 \delta(x)^2 dx \\
&= 2 \left( \frac{m}{m+2} + A_0^2 + \frac{1}{5} A_1^2 - 2A_0 \frac{m}{m+1} - 2A_1 \frac{m}{3m+1} + \frac{2}{3} A_0 A_1 \right).
\end{aligned}$$

Zamenom vrednosti za $A_0$ i $A_1$ dobijamo

$$\|\delta(x)\|^2 = \frac{2m(4m^2 - 4m + 1)}{(m+2)(m+1)^2(3m+1)^2}\,.$$

Kada $m \to +\infty$, imamo

$$\|\delta(x)\| \to 0,$$

što se i očekivalo, s obzirom da $f(x) \to 1$ kada $m \to +\infty$.

**6.2.15.** Za funkciju $x \mapsto f(x) = \sin \pi x$ odrediti najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na $[0,1]$ u obliku $\Phi(x) = a_1\, x(1-x) + a_2\,(x(1-x))^2$.

**Rešenje.** Definišimo funkciju greške

$$\delta(x) = f(x) - \Phi(x) = \sin \pi x - a_1\, x(1-x) + a_2\,[x(1-x)]^2\ .$$

Najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju, funkcije $f$ pomoću funkcije $\Phi$, dobijamo minimizacijom kvadrata norme funkcije greške

$$I(a_1, a_2) = \|\delta(x)\|_2^2 = \int_0^1 \bigl\{\sin \pi x - a_1\, x(1-x) - a_2\,[x(1-x)]^2\bigr\}^2\, dx\,.$$

Iz uslova

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial a_1} &= -2\int_0^1 x(1-x)\bigl\{\sin \pi x - a_1\, x(1-x) - a_2\,[x(1-x)]^2\bigr\}\, dx = 0\,,\\
\frac{\partial I}{\partial a_2} &= -2\int_0^1 [x(1-x)]^2\,\bigl\{\sin \pi x - a_1\, x(1-x) - a_2\,[x(1-x)]^2\bigr\}\, dx = 0\,,
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{30}\,a_1 + \frac{1}{140}\,a_2 &= \frac{4}{\pi^3}\,,\\
\frac{1}{140}\,a_1 + \frac{1}{630}\,a_2 &= \frac{48}{\pi^5} - \frac{4}{\pi^3}\,,
\end{aligned}$$

odakle je

$$a_1 = \frac{240}{\pi^3}\left(77 - \frac{756}{\pi^2}\right) \cong 3.1053, \qquad a_2 = \frac{5040}{\pi^3}\left(\frac{168}{\pi^2} - 17\right) \cong 3.5694\,.$$

Dakle, najbolja srednje-kvadratna aproksimacija je data sa

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\cong 3.1053\, x(1-x) + 3.5694\,[x(1-x)]^2\\
&\cong x(1-x)\,(3.1053 + 3.5694\, x(1-x))\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Ovaj problem se može rešiti i na drugi način, korišćenjem uslovnog ekstremuma. Naime, ako uvedemo smenu $x = (1-t)/2$ dati problem se svodi na određivanje aproksimacije za funkciju $g(t) = \cos\dfrac{\pi t}{2}$ na $[-1,1]$ u obliku $\varphi(t) = C_1\bigl(1-t^2\bigr) + C_2\bigl(1-t^2\bigr)^2$, gde su $C_1$ i $C_2$ nepoznati parametri. Primetimo da je aproksimaciona funkcija parna i da je $\varphi(1) = g(1) = 0$. Potražićemo rešenje u obliku $\varphi(t) = b_0\,P_0(t) + b_1\,P_2(t) + b_2\,P_4(t)$, gde su $P_k$ Legendreovi polinomi, uzimajući u obzir uslov $\varphi(1) = 0$. Opštiji slučaj se može razmatrati, na primer, sa Gegenbauerovim polinomima, ako se radi o težinskoj funkciji $p(t) = \bigl(1-t^2\bigr)^{\lambda-1/2}$. U našem slučaju težinska funkcija je jednaka jedinici.

Prema tome, minimiziraćemo funkciju

$$F(b_0,b_1,b_2) = \int_{-1}^{1}\Bigl(\cos\frac{\pi t}{2} - \sum_{k=0}^{2} b_k\,P_{2k}(t)\Bigr)^2 dt - \lambda\sum_{k=0}^{2} b_k\,P_{2k}(1)\,,$$

gde je $\lambda$ Lagrangeov množilac. Iz uslova

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = -2\int_{-1}^{1}\Bigl(\cos\frac{\pi t}{2} - \sum_{k=0}^{2} b_k\,P_{2k}(t)\Bigr)P_{2i}(t)\,dt - \lambda P_{2i}(1) = 0$$

i

$$\sum_{k=0}^{2} b_k\,P_{2k}(1) = 0\,,$$

i uzimajući u obzir da je $P_{2i}(1) = 1$ i $\|P_k\|^2 = \dfrac{2}{2k+1}$, nalazimo

$$R_{2i} - b_i\,\frac{2}{4i+1} + \lambda = 0 \qquad (i = 0,1,2)\,, \tag{2}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 = 0\,, \tag{3}$$

gde je $R_{2i}$ skalarni proizvod

$$R_{2i} = \Bigl(\cos\frac{\pi t}{2},\ P_{2i}\Bigr) = \int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi t}{2}\,P_{2i}(t)\,dt\,.$$

Na osnovu (2) imamo

$$b_i = \frac{4i+1}{2}\,(\lambda + R_{2i}) \qquad (i = 0,1,2)\,. \tag{4}$$

Iz (3) tada sleduje

$$\lambda = -\frac{1}{15}\left(R_0 + 5R_2 + 9R_4\right) = -\frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{112}{\pi^2} + \frac{1008}{\pi^4}\right),$$

s obzirom da je

$$\begin{aligned}
R_0 &= \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi t}{2}\, dt = \frac{4}{\pi}, \\
R_2 &= \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) dt = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right), \\
R_4 &= \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{8}\left(35\,t^4 - 30\,t^2 + 3\right) dt = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{180}{\pi^2} + \frac{1680}{\pi^4}\right).
\end{aligned}$$

Sada, na osnovu (4), dobijamo

$$b_0 = \frac{224}{\pi^3}\left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right), \quad b_1 = \frac{40}{\pi^3}\left(25 - \frac{252}{\pi^2}\right), \quad b_2 = \frac{72}{\pi^3}\left(\frac{168}{\pi^2} - 17\right).$$

Tražena aproksimacija je, dakle,

$$\cos\frac{\pi t}{2} \sim \varphi(t) = b_0\, P_0(t) + b_1\, P_2(t) + b_2\, P_4(t).$$

S obzirom da je $P_0(t) = 1$, $P_2(t) = 1 - \frac{3}{2}\left(1 - t^2\right)$ i $P_4(t) = 1 - 5\left(1 - t^2\right) + \frac{35}{8}\left(1 - t^2\right)^2$ imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \left(-\frac{3}{2}\, b_1 - 5\, b_2\right)\left(1 - t^2\right) + \frac{35}{8}\, b_2\left(1 - t^2\right)^2 \\
&= \frac{60}{\pi^3}\left(77 - \frac{756}{\pi^2}\right)\left(1 - t^2\right) + \frac{315}{\pi^3}\left(\frac{168}{\pi^2} - 17\right)\left(1 - t^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Vraćajući se na staru promenljivu $x = (1 - t)/2$, dobijamo (1).

*Literatura:*

S. Wrigge, A. Fransén: *A general method of approximation. Part I.* Math. Comp. **38** (1982), 567–588.

G. V. Milovanović, S. Wrigge: *Least squares approximation with constraints.* Math. Comp. **46** (1986), 551–565.

**6.2.16.** Postupkom ekonomizacije aproksimirati polinom

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6}$$

polinomom $Q_m(x)$ $(m < 5)$, što je moguće nižeg stepena, tako da važi

$$|P(x) - Q_m(x)| \leq 0.05 \qquad (|x| \leq 1)\,.$$

**Rešenje.** Izvršimo najpre ekonomizaciju korišćenjem Čebiševljevih polinoma $x \mapsto T_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Za Čebiševljeve polinome važi rekurentna relacija

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

na osnovu koje, s obzirom da je

$$T_0 = 1\,, \qquad T_1 = x\,,$$

dobijamo

$$T_2 = 2x^2 - 1,\ T_3 = 4x^3 - 3x,\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

a odavde je

$$\begin{gathered} 1 = T_0\,,\ x = T_1\,,\ x^2 = \frac{1}{2}\,(T_0 + T_2)\,,\ x^3 = \frac{1}{4}\,(3\,T_1 + T_3)\,, \\ x^4 = \frac{1}{8}\,(3\,T_0 + 4\,T_2 + T_4)\,,\ x^5 = \frac{1}{16}\,(10\,T_1 + 5\,T_3 + T_5)\,. \end{gathered}$$

Korišćenjem ovih formula, polinom $P(x)$ se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} P(x) = T_0 + \frac{1}{2}\,T_1 + \frac{1}{6}\,(T_0 + T_2) + \frac{1}{16}\,(3\,T_1 + T_3) + \\ + \frac{1}{40}\,(3\,T_0 + 4\,T_2 + T_4) + \frac{1}{96}\,(10\,T_1 + 5\,T_3 + T_5)\,, \end{aligned}$$

tj.

(1) $$P(x) = \frac{1}{120}\,(149\,T_0 + 32\,T_2 + 3\,T_4) + \frac{1}{96}\,(76\,T_1 + 11\,T_3 + T_5)\,.$$

Ako formiramo polinom $Q_4(x)$ na taj način što u razvoju (1) „ukinemo“ polinom $T_5$, tada je, s obzirom da Čebiševljevi polinomi zadovoljavaju nejednakost $|T_n(x)| \leq 1$ $(|x| \leq 1)$,

$$|P(x) - Q_4(x)| \leq \frac{1}{96} < 0.05 \qquad (|x| \leq 1)\,.$$

S obzirom da granica greške 0.05 nije premašena, formirajmo polinom $Q_3(x)$ tako što u razvoju (1) „ukidamo“ polinome $T_5$ i $T_4$, pri čemu je

$$|P(x) - Q_3(x)| \leq \frac{1}{96} + \frac{3}{120} < 0.05 \qquad (|x| \leq 1)\,.$$

Dalje, pokušajmo sa polinomom $Q_2(x)$ koji dobijamo iz razvoja (1) „ukidanjem" $T_5$, $T_4$ i $T_3$, pri čemu je

$$|P(x) - Q_2(x)| \leq \frac{1}{96} + \frac{3}{120} + \frac{11}{96} > 0.05 \qquad (|x| \leq 1)\,.$$

Kako je, u ovom slučaju, granica greške od 0.05, prema našoj oceni, premašena, za traženi polinom ćemo uzeti

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= \frac{1}{120}\,(149\,T_0 + 32\,T_2) + \frac{1}{96}\,(76\,T_1 + 11\,T_3) \\ &= \frac{117}{120} + \frac{43}{96}\,x + \frac{8}{15}\,x^2 + \frac{11}{24}\,x^3\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Primetimo da polinom $Q_3$, definisan u (2), predstavlja najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju sa Čebiševljevom težinskom funkcijom $x \mapsto \left(1-x^2\right)^{-1/2}$ za polinom $P(x)$ na segmentu $[-1, 1]$, u skupu polinoma ne višeg stepena od tri (videti [2, str. 106]).

Primenimo, sada, postupak ekonomizacije na polinom $P(x)$ uz korišćenje Legendreovih polinoma $x \mapsto P_n(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$. Za Legendreove polinome važi rekurentna relacija

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\,[(2n+1)x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)] \qquad (n = 1, 2, \dots)\,,$$

na osnovu koje, s obzirom da je

$$P_0 = 1\,, \qquad P_1 = x\,,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} &P_2 = \frac{1}{2}\big(3x^2 - 1\big)\,,\; P_3 = \frac{1}{2}\big(5x^3 - 3x\big)\,,\; P_4 = \frac{1}{8}\big(35x^4 - 30x^2 + 3\big)\,, \\ &P_5 = \frac{1}{8}\big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\,, \end{aligned}$$

a odavde je

$$\begin{gathered} 1 = P_0\,,\; x = P_1\,,\; x^2 = \frac{1}{3}\,(2P_2 + P_0)\,,\; x^3 = \frac{1}{5}\,(2P_3 + 3P_1)\,, \\ x^4 = \frac{1}{35}\,(8P_4 + 20P_2 + 7P_0)\,,\; x^5 = \frac{1}{63}\,(8P_5 + 28P_3 + 27P_1)\,. \end{gathered}$$

Korišćenjem ovih formula, polinom $P(x)$ se može predstaviti u obliku

$$P(x) = \frac{259}{225}\,P_0 + \frac{101}{140}\,P_1 + \frac{106}{315}\,P_2 + \frac{47}{270}\,P_3 + \frac{8}{175}\,P_4 + \frac{4}{189}\,P_5\,. \tag{3}$$

Formirajmo polinom $Q_n^*(x)$, na taj način što u razvoju (3) „ukinemo“ polinom $P_5$. Tada je, s obzirom da Legendreovi polinomi zadovoljavaju nejednakost $|P_n(x)| \le 1$ $(|x| \le 1)$,

$$|P(x) - Q_4^*(x)| \le \frac{4}{189} < 0.05 \qquad (|x| \le 1)\,.$$

S obzirom da je granica greške manja od 0.05, formirajmo polinom $Q_3^*(x)$ tako što u razvoju (3) „ukinemo“ polinome $P_4$ i $P_5$, pri čemu je

$$|P(x) - Q_3^*(x)| \le \frac{4}{189} + \frac{8}{175} > 0.05 \qquad (|x| \le 1)\,.$$

Kako je u ovom slučaju greška od 0.05, prema našoj oceni, premašena, za traženi polinom ćemo uzeti

$$\begin{aligned} Q_4^*(x) &= \frac{259}{225}\,P_0 + \frac{101}{140}\,P_1 + \frac{106}{315}\,P_2 + \frac{47}{270}\,P_3 + \frac{8}{175}\,P_4 \\ &= 1 + \frac{29}{63}\,x + \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{47}{108}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^4\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Napomenimo da polinom $Q_4^*$, definisan u (4), prestavlja najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju za polinom $P(x)$, na segmentu $[-1,1]$, u skupu polinoma stepena ne višeg od četiri (slično se dokazuje kao u [2, str. 106]).

**6.2.17.** Funkciju $x \mapsto y = \sin x$ aproksimirati polinomom trećeg stepena sa tačnošću $\varepsilon = 0.0006$ na intervalu $[-1,1]$.

**Rešenje.** Ako funkciju $x \mapsto y = \sin x$ aproksimiramo Macclaurinovim polinomom sedmog stepena, tj.

$$\sin x \cong P_7(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\,,$$

činimo grešku

$$|\sin x - P_7(x)| \le \frac{1}{9!} < 0.000003 \quad (x \in [-1,1]).$$

Dalje, aproksimirajmo polinom $P_7(x)$ polinomom trećeg stepena postupkom ekonomizacije uz korišćenje Čebiševljevih polinoma $T_n(x)$ $(n = 0, 1, \dots, 7)$ (videti zadatak 6.2.16). Tako, imamo

$$\begin{aligned} P_7(x) = \frac{1}{1!}T_1 &- \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{4}(3T_1 + T_3) + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5) \\ &- \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7), \end{aligned}$$

tj.

$$P_7(x) = \frac{8111}{9216}T_1 - \frac{601}{15360}T_3 + \frac{23}{46080}T_5 - \frac{1}{322560}T_7\,,$$

a „ukidanjem“ polinoma $T_7$ i $T_5$ dobijamo polinom trećeg stepena

$$Q_3(x) = \frac{8111}{9216}T_1 - \frac{601}{15360}T_3 = \frac{11491}{11520}\,x - \frac{601}{3840}\,x^3\,,$$

pri čemu važi ocena

$$|P_7(x) - Q_3(x)| \le \left|\frac{-1}{322560}\right| + \left|\frac{23}{46080}\right| < 0.000503 \quad (x \in [-1,1])\,.$$

Sada možemo proceniti ukupnu grešku koju činimo ako funkciju $x \mapsto y = \sin x$ aproksimiramo sa polinomom $Q_3(x)$ za $x \in [-1,1]$. Dakle, važi

$$\begin{aligned} |\sin x - Q_3(x)| &\le |\sin x - P_7(x)| + |P_7(x) - Q_3(x)| \\ &< 0.000003 + 0.000503 = 0.000506 < \varepsilon = 0.0006\,, \end{aligned}$$

pa je traženi polinom $Q_3(x)$ koji se može približno zapisati sa

$$Q_3(x) \cong 0.99748x - 0.15651x^3\,.$$

**6.2.18.** Pomoću razvoja u Čebiševljeve polinome naći polinom najnižeg stepena koji ravnomerno aproksimira funkciju

$$f(x) = \frac{10+x}{101+20x},$$

na $[-1,1]$, sa tačnošću $10^{-5}$.

**Rešenje.** Za $|r| < 1$ važi razvoj

$$\frac{1}{1 - r\,e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Izjednačavanjem realnih delova jednakosti dobija se

$$\frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\cos n\theta, \quad |r| < 1.$$

Zamenom $\theta = \arccos x$ i uzimajući u obzir da je

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x),$$

dobijamo

$$\frac{1-rx}{1-2rx+r^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\, T_n(x), \quad |r|<1.$$

Za $r=-1/10$ dobijamo

$$\frac{10+x}{101+20x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{10^{n+1}}\, T_n(x).$$

Zbog toga što je dobijeni red alternativan i zbog

$$|T_n(x)|\le 1, \quad x\in[-1,1], \quad n=0,1,2,\dots\ ,$$

imamo da je za $n\ge 3$,

$$\left| f(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, \frac{1}{10^{k+1}}\, T_k(x)\right| \le \frac{1}{10^{n+2}}\le 10^{-5} \qquad (x\in[-1,1]).$$

Dakle, dovoljno je uzeti prva četiri člana razvoja:

$$\frac{10+x}{101+20x}\approx \frac{1}{10}T_0(x)-\frac{1}{10^2}T_1(x)+\frac{1}{10^3}T_2(x)-\frac{1}{10^4}T_3(x),$$

tj.

$$\frac{10+x}{101+20x}\approx 0.099-0.0097x+0.002x^2-0.0004x^3.$$

**6.2.19.** Metodom najmanjih kvadrata (diskretna srednje-kvadratna aproksimacija) odrediti parametre $a_0$ i $a_1$ u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x)=a_0+a_1\,x$, za sledeći skup podataka

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $f(x_j)$ | 1 | 3 | 0 | $-1$ |

**Rešenje.** Ako postavimo uslov

$$f(x_j)=\Phi(x_j) \qquad (j=0,1,2,3)\,,$$

dolazimo do tzv. preodređenog sistema jednačina, tj.

$$\begin{aligned} a_0+0\cdot a_1 &= \ \ 1\,,\\ a_0+1\cdot a_1 &= \ \ 3\,,\\ a_0+2\cdot a_1 &= \ \ 0\,,\\ a_0+4\cdot a_1 &= -1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

ili, u matričnom obliku

$$X\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}\,, \tag{2}$$

gde je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sistem (1) nema rešenja, tj. sve jednačine ne mogu biti istovremeno zadovoljene. Ako definišemo $\delta$ pomoću

$$\delta(x) = f(x) - \Phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{1} a_k\, x^k\,,$$

moguće je tražiti „rešenje" sistema (1), tj. odrediti koeficijente $a_0$ i $a_1$, tako da veličina

$$\|\delta\|_2 = \Big(\sum_{j=0}^{3} |f(x_j) - \Phi(x_j)|^2\Big)^{1/2}$$

ima najmanju vrednost. Kako je dokazano u [2, str. 108–110], tražene koeficijente nalazimo kao rešenje sistema jednačina, koji dobijamo množenjem (2) matricom $X^\top$ sa leve strane, tj.

$$X^\top X\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{f}$$

ili

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5/7 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\Phi(x) = -\dfrac{5}{7}\,x + 2$. Veličina najbolje aproksimacije je

$$\|\delta\|_2 = \Big(\sum_{j=0}^{3} |f(x_j) - \Phi(x_j)|^2\Big)^{1/2} \cong 2.070\,.$$

**6.2.20.** Metodom najmanjih kvadrata odrediti parametre u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x) = a_0 + a_1 x$ za sledeći skup parova $(x_j, f_j)$:

$$\big\{(1,\ 1.95),\ (2,\ 2.40),\ (3,\ 2.83),\ (4,\ 3.30)\big\}. \tag{1}$$

Koristeći se dobijenim rezultatom naći aproksimaciju u obliku $y = a\,e^{bx}$ za sledeći skup podataka $\{(1,7),\ (2,11),\ (3,17),\ (4,27)\}$.

**Rešenje.** Slično kao u zadatku 6.2.19 imamo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1.95 \\ 2.40 \\ 2.83 \\ 3.30 \end{bmatrix}.$$

Tada je sistem normalnih jednačina $X^\top X\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{f}$, tj.

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.48 \\ 28.44 \end{bmatrix},$$

odakle nalazimo $a_0 = 1.5$ i $a_1 = 0.448$.

Da bismo odredili parametre $a$ i $b$ u aproksimacionoj funkciji $y = a\,e^{bx}$ metodom najmanjih kvadrata potrebno je minimizirati funkciju

$$F(a,b) = \sum_{k=0}^{3} \left(f_k - a\,e^{bx_k}\right)^2, \tag{2}$$

tj.

$$F(a,b) = \left(7 - ae^{b}\right)^2 + \left(11 - ae^{2b}\right)^2 + \left(17 - ae^{3b}\right)^2 + \left(27 - ae^{4b}\right)^2,$$

što ponekad može biti veoma komplikovano, jer je potrebno rešiti sistem nelinearnih jednačina. U našem slučaju, ovaj sistem jednačina ima oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= 2\sum_{k=0}^{3} \left(f_k - a\,e^{bx_k}\right)\left(-e^{bx_k}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2\sum_{k=0}^{3} \left(f_k - a\,e^{bx_k}\right)\left(-a\,x_k\,e^{bx_k}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Problem se može jednostavno približno rešiti, međutim, kao što ćemo videti, greška može biti ponekad i dosta velika. Logaritmovanjem aproksimacione funkcije dobijamo $\log y = \log a + bx$. Ako uvedemo smene $Y = \log y$, $X = x$, $a_0 = \log a$, $a_1 = b$, problem se svodi na određivanje parametara u linearnoj aproksimacionoj funkciji za skup podataka $(X_j, Y_j) = (x_j, \log y_j)$ $(j = 0,1,2,3)$. Logaritmovanjem datih podataka i zaokrugljivanjem na dve decimale dobijamo, upravo, skup podataka datih u (1). Prema tome, imamo

$$a = e^{a_0} = e^{1.5} \cong 4.48 \qquad \text{i} \qquad b = a_1 = 0.448. \tag{4}$$

Naravno, ove vrednosti ne minimiziraju funkciju $F(a, b)$, tj. nisu rešenja sistema jednačina (2). Međutim, ova rešenja se mogu iskoristiti kao početna rešenja za jedan iterativni proces koji bi trebalo konstruisati tako da konvergira ka rešenju sistema (3). Na primer, to može biti metod Newton-Kantorovića.

Sa $\bar{a}$ i $\bar{b}$ označimo tačno rešenje sistema (3). Tada, korišćenjem vrednosti (4), kao približne vrednosti, možemo pisati

$$\bar{a} = a + \Delta a\,, \qquad \bar{b} = b + \Delta b\,, \tag{5}$$

gde su $\Delta a$ i $\Delta b$ korekcije koje treba odrediti. Jedan iterativni proces može se konstruisati linearizacijom aproksimacione funkcije i primenom metode najmanjih kvadrata na rešavanje tako dobijenog sistema linearnih jednačina.

Stavimo $y = f(x;\ a, b) = a\,e^{bx}$. Kako je $\dfrac{\partial f}{\partial a} = e^{bx}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial b} = a\,x\,e^{bx}$, na osnovu

$$f(x;\ \bar{a}, \bar{b}) \cong f(x;\ a, b) + \frac{\partial f}{\partial a}\,\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\,\Delta b\,, \tag{6}$$

uzimajući $x = x_k$ i $f(x_k;\ \bar{a}, \bar{b}) \cong f_k$, dobijamo preodređeni sistem jednačina

$$e^{bx_k}\,\Delta a + a\,x_k\,e^{bx_k}\,\Delta b = f_k - a\,e^{bx_k} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\,,$$

koji u matričnom obliku izgleda

$$M\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e},$$

gde su $M = \begin{bmatrix} m_{ij} \end{bmatrix}_{4\times 2}$, $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta b \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}^\top$ i

$$m_{i1} = \exp(bx_{i-1})\,, \quad m_{i2} = ax_{i-1}m_{i1}\,, \quad e_i = f_{i-1} - am_{i1}\,.$$

Iz normalnog sistema jednačina $M^\top M\boldsymbol{\delta} = M^\top\boldsymbol{e}$ određujemo vektor $\boldsymbol{\delta}$, tj. korekcije $\Delta a$ i $\Delta b$. S obzirom na linearizaciju (6), ove korekcije neće biti takve da pomoću (5) dobijemo tačna rešenja, već ćemo dobiti izvesna približna rešenja, označimo ih sa $a'$ i $b'$, koja će biti tačnija u odnosu na (4). Ovaj postupak se može ponoviti više puta, tačnije rečeno sve dok se ne dobiju rešenja sa zadovoljavajućom tačnošću. U posmatranom primeru dobijamo rezultate koji su sređeni u sledećoj tabeli:

| $a$ | $b$ | $\Delta a$ | $\Delta b$ |
|---|---|---|---|
| 4.48 | 0.448 | 2.4740850 | 0.0054336 |
| 6.9540850 | 0.4534335 | −0.0003339 | −0.0019247 |
| 6.9537511 | 0.4515088 | 0.0001756 | −0.0000155 |
| 6.9539267 | 0.4514933 | 0.0000012 | −0.0000001 |
| 6.9539279 | 0.4514932 | | |

Prema tome, za rešenje sistema (3) možemo uzeti

$$\bar{a} \cong 6.9539279 \qquad \text{i} \qquad \bar{b} \cong 0.4514932\,, \tag{7}$$

što se bitno razlikuje od rešenja (4). Rešenja (7) možemo dobiti i na sledeći način: eliminacijom parametra $a$ iz sistema (3)

$$a = \frac{\sum\limits_{k=0}^{3} f_k \exp(b\,x_k)}{\sum\limits_{k=0}^{3} \exp(2b\,x_k)}\,, \tag{8}$$

dobijamo nelinearnu jednačinu za određivanje parametra $b$ u obliku

$$G(q) = \Big(\sum_{k=0}^{3} x_k f_k\, q^{x_k}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{3} q^{2x_k}\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{3} x_k\, q^{2x_k}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{3} f_k\, q^{x_k}\Big) = 0\,,$$

gde smo stavili $q = \exp(b)$.

Kako je $G(1.5) \cong 102.88$ i $G(1.6) = -59.2$ zaključujemo da jednačina $G(q) = 0$ u intervalu $(1.5,\ 1.6)$ ima koren. Metodom sečice, sa startnim vrednostima $q_0 = 1.5$ i $q_1 = 1.6$, dobijamo rezultate koji su dati u sledećoj tabeli:

| $k$ | $q_k$ | $G(q_k)$ | $b_k$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.563473105 | 12.9 ( 0) | 0.446909696 |
| 3 | 1.570000681 | 1.2 ( 0) | 0.451076053 |
| 4 | 1.570671244 | −2.8 (−2) | 0.451503072 |
| 5 | 1.570655766 | 6.0 (−5) | 0.451493217 |
| 6 | 1.570655798 | | 0.451493238 |

U koloni sa vrednostima $G(q_k)$ broj u zagradi ukazuje na decimalni eksponent. U skladu sa (8) nalazimo $a \cong 6.95392787$.

Vratimo se opet na razmatranje funkcije $F$ definisane pomoću (2). Kao što smo pokazali, uvođenjem smena $Y = \log y$ i $X = x$, aproksimaciona funkcija se svodi na linearnu, ali su greške u dobijenim parametrima značajne. Ove greške mogu biti znatno smanjene uvođenjem težinskih koeficijenata na pogodan način prilikom rešavanja odgovarajućeg linearnog problema. Pokazaćemo sada taj pristup na istom primeru. Neka su $Y_k = \log f_k$, tj. $f_k = e^{Y_k}$, $a = e^{a_0}$ i $b = a_1$. Tada se (2) svodi na

$$F(a,b) = H(a_0,a_1) = \sum_{k=0}^{3} \Big(e^{Y_k} - e^{a_0 + a_1 X_k}\Big)^2\,.$$

Primenom Lagrangeove teoreme o srednjoj vrednosti funkcije dobijamo

$$H(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{3} e^{2W_k} \left(Y_k - a_0 - a_1 X_k\right)^2 ,$$

gde se $W_k$ nalazi između $Y_k$ i $a_0 + a_1 X_k$. Pretpostavljajući da su ove vrednosti bliske, možemo uzeti $W_k = Y_k$, tj. $e^{2W_k} = f_k^2$. Dakle, funkcija koju treba minimizirati je

$$H(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{3} f_k^2 \left(Y_k - a_0 - a_1 X_k\right)^2 ,$$

što znači da treba primeniti metod najmanjih kvadrata sa težinskom matricom

$$P = \operatorname{diag}\left(f_0^2,\ f_1^2,\ f_2^2,\ f_3^2\right) = \begin{bmatrix} 49 & & & \\ & 121 & & \\ & & 289 & \\ & & & 729 \end{bmatrix} .$$

Sistem normalnih jednačina sada glasi

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k=0}^{3} f_k^2\Big) a_0 + \Big(\sum_{k=0}^{3} f_k^2\, x_k\Big) a_1 &= \sum_{k=0}^{3} f_k^2 \log f_k\,, \\ \Big(\sum_{k=0}^{3} f_k^2\, x_k\Big) a_0 + \Big(\sum_{k=0}^{3} f_k^2\, x_k^2\Big) a_1 &= \sum_{k=0}^{3} f_k^2\, x_k \log f_k\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 1188\, a_0 + 2886\, a_1 &= 3606.96\,, \\ 2886\, a_0 + 7838\, a_1 &= 9135.74\,, \end{aligned}$$

odakle nalazimo

$$a_0 \cong 1.93945\,, \qquad \text{tj.} \qquad a = e^{a_0} \cong 6.95492$$

i

$$a_1 = b \cong 0.45145\,.$$

Dobijeni parametri $a$ i $b$ su znatno tačniji, nego oni dobijeni bez upotrebe težinskih koeficijenata.

**6.2.21.** Korišćenjem metoda najmanjih kvadrata (diskretna srednje-kvadratna aproksimacija) približno odrediti aproksimacionu funkciju oblika

$$F(x) = \log(a + e^{b+x})$$

za funkciju $x \mapsto f(x)$ koja je zadata skupom podataka

| $x$ | 2.6 | 2.8 | 3.0 | 3.5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\log 2.22$ | $\log 2.44$ | $\log 2.67$ | $\log 3.21$ |

**Rešenje.** Iz $F(x) = \log(a + e^{b+x})$ imamo da je $e^{F(x)} = a + e^b \cdot e^x$, tj.

$$\phi(t) = A + Bt, \quad \text{gde su} \quad A = a,\ B = e^b,\ t = e^x.$$

Aproksimacioni uslov $F(x_k) = f(x_k)$, tj. $e^{F(x_k)} = e^{f(x_k)}$ daje

$$X = \begin{bmatrix} 1 & e^{2.6} \\ 1 & e^{2.8} \\ 1 & e^{3.0} \\ 1 & e^{3.5} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 2.22 \\ 2.44 \\ 2.67 \\ 3.21 \end{bmatrix}.$$

Sistem $X^\top X\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{f}$ tada postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{2.6} & e^{2.8} & e^{3.0} & e^{3.5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{2.6} \\ 1 & e^{2.8} \\ 1 & e^{3.0} \\ 1 & e^{3.5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{2.6} & e^{2.8} & e^{3.0} & e^{3.5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.22 \\ 2.44 \\ 2.67 \\ 3.21 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na vrednosti $e^{2.6} \cong 13.464$, $e^{2.8} \cong 16.445$, $e^{3.0} \cong 20.086$, $e^{3.5} \cong 33.115$, prethodni sistem se transformiše u sistem jednačina

$$\begin{bmatrix} 4 & 83.11 \\ 83.11 & 1951.768 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.54 \\ 229.945 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo $A = 1.596$, $B = 0.05$, tj.

$$a = A = 1.596, \quad b = \log B = -2.996.$$

Aproksimaciona funkcija je

$$F(x) \cong \log(1.596 + e^{-2.996+x}).$$

**6.2.22.** Pomoću metoda najmanjih kvadrata približno odrediti aproksimacionu funkciju oblika $y = a\, e^{bx}$ za sledeći skup podataka

| $x_j$ | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|
| $f_j$ | $e^{2.2}$ | $e^{2.8}$ | $e^{3.0}$ | $e^{3.2}$ |

**Rešenje.** Slično kao u i prethodnom zadatku, korišćenjem podataka

| $x_j$ | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|
| $\log f_j$ | 2.2 | 2.8 | 3.0 | 3.2 |

bez upotrebe težinske matrice nalazimo $\Phi(x) \cong 1.487 + 0.784\,x$. Tada je tražena aproksimacija

$$y = \varphi(x) \cong e^{\Phi(x)} \cong 4.424\,e^{0.784\,x}.$$

**6.2.23.** Eksperimenti u jednom periodičnom procesu dali su sledeće podatke

| $t_j$ | $0°$ | $50°$ | $100°$ | $150°$ | $200°$ | $250°$ | $300°$ | $350°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_j$ | 0.754 | 1.762 | 2.041 | 1.412 | 0.303 | $-0.484$ | $-0.380$ | 0.520 |

Odrediti parametre $a$ i $b$ u modelu $\Phi(x) = a + b\sin t$ korišćenjem metoda najmanjih kvadrata.

**Rešenje.** Minimizacijom funkcije

$$F(a,b) = \sum_{j=0}^{7} \big(f_j - a - b\sin t_j\big)^2$$

nalazimo

$$a \cong 0.75257 \qquad \text{i} \qquad b \cong 1.31281\,.$$

Potrebne sume su

$$\sum_{k=0}^{7} \sin t_k \cong -0.0705341\,, \qquad \sum_{k=0}^{7} (\sin t_k)^2 \cong 3.5868241\,,$$

$$\sum_{k=0}^{7} f_k = 5.928\,, \qquad \sum_{k=0}^{7} f_k^2 = 10.57345\,, \qquad \sum_{k=0}^{7} f_k \sin t_k \cong 4.6557347\,.$$

**6.2.24.** Metodom najmanjih kvadrata aproksimirati sledeći skup podataka

| $x_j$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_j$ | $-0.1$ | 0.1 | 0.4 | 0.9 | 1.6 |

pomoću $\Phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

**Rešenje.** Ovde imamo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad X^\top \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7.0 \end{bmatrix},$$

iz sistema jednačina $\big(X^\top X\big)\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{f}$ dobijamo

$$a_0 = 0.4086\,, \qquad a_1 = 0.42\,, \qquad a_2 = 0.0857\,.$$

**6.2.25.** Korišćenjem bazisnih funkcija $\Phi_0(x) = 1$, $\Phi_1(x) = x-2$, $\Phi_2(x) = x^2 - 4x + 2$, metodom najmanjih kvadrata aproksimirati skup podataka

$$\Big\{(0,-2),\ (1,2),\ (2,5),\ (3,3),\ (4,1)\Big\}$$

pomoću $\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x)$.

**Rešenje.** Ovde imamo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad X^\top \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -17 \end{bmatrix},$$

nalazimo

$$a_0 = \frac{9}{5} = 1.8\,, \qquad a_1 = \frac{7}{10} = 0.7\,, \qquad a_2 = \frac{-17}{14} = -1.214\,.$$

Primetimo da je sistem funkcija $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ ortogonalan u smislu skalarnog proizvoda

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{4} f(k)\, g(k)\,.$$

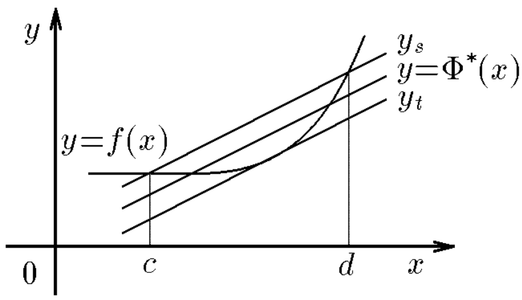
**6.2.26.** Na segmentu $[c,d]$ naći mini-max aproksimaciju funkcije $f$ u skupu polinoma stepena ne višeg od prvog. Funkcija $f$ je dva puta neprekidno-diferencijabilna na segmentu $[c,d]$ i $f''(x) > 0$ (ili $< 0$) za svako $x \in [c,d]$.

**Rešenje.** Aproksimacionu funkciju $\Phi(x) = a_0 + a_1 x$ treba odrediti iz uslova da maksimlno odstupanje funkcije greške

$$\delta(x) = f(x) - \Phi(x) = f(x) - a_0 - a_1 x$$

od nule, na segmentu $[c,d]$, bude minimalno, tj. tražimo

$$\min_{a_0,a_1}\Big(\max_{c\le x\le d}|f(x)-a_0-a_1x|\Big) = \max_{c\le x\le d}|f(x)-\bar a_0-\bar a_1 x| = \|\delta^*(x)\|_\infty\,.$$




Sl. 1.

*Prvi način:* U ovom slučaju, s obzirom da je $f''(x) > 0$ (ili $f''(x) < 0$) za svako $x \in [c,d]$, funkcija $f$ je konveksna (konkavna), te možemo za rešavanje postavljenog problema iskoristiti sledeći prost geometrijski postupak. Kroz krajnje tačke krive $y = f(x)$ $(c \le x \le d)$ postavimo sečicu, a zatim tangentu krive koja je paralelna sa ovom sečicom (videti Sl. 1).

Odgovarajuće jednačine ovih pravih su, redom

$$y_s = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}\,(x-c) + f(c)\,,$$

$$y_t = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}\,(x-x_2) + f(x_2)\,,$$

gde je tačka $x_2$ koren jednačine

$$f'(x_2) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}\,. \tag{1}$$

Nije teško zaključiti da je tražena aproksimaciona funkcija data sa

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{2}(y_s + y_t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x \,,$$

gde su

$$\bar{a}_1 = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,, \quad \bar{a}_0 = \frac{1}{2}(f(c) + f(x_2)) - \frac{1}{2}(c + x_2)\,\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,,$$

pri čemu tačku $x_2$ nalazimo iz (1).

*Drugi način:* Na osnovu teoreme o Čebiševljevoj alternansi (videti [2, str. 118–119]), polinom $\Phi^*(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x$ je najbolja mini-max aproksimacija za $f \in C[c, d]$, ako i samo ako na $[c, d]$ postoje bar tri tačke $x_1,\ x_2,\ x_3$ $(x_1 < x_2 < x_3)$, takve da je

$$\delta^*(x_1) = -\delta^*(x_2) = \delta^*(x_3) = \pm\|\delta^*(x)\|_\infty \,. \tag{2}$$

S druge strane, s obzirom da je

$$\delta''(x) = f''(x) > 0 \qquad (< 0)$$

zaključujemo da je

$$\delta'(x) = f'(x) - a_1$$

monotona funkcija, pa kao takva može imati najviše jednu realnu nulu.

Dakle, na osnovu prethodnog, zaključujemo da je

$$x_1 = c\,, \qquad x_3 = d\,,$$

a tačka $x_2$ je koren jednačine

$$\delta'(x_2) = f'(x_2) - a_1 = 0\,. \tag{3}$$

Sada, na osnovu (2) imamo

$$f(c) - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 c = -(f(x_2) - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_2) = f(d) - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 d\,,$$

odakle dobijamo

$$\bar{a}_1 = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,, \quad \bar{a}_0 = \frac{1}{2}(f(c) + f(x_2)) - \frac{1}{2}(c + x_2)\,\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,,$$

pri čemu je $x_2$ koren jednačine (3), tj.

$$f'(x_2) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \qquad (x_2 \in (c, d))\,.$$

**6.2.27.** U skupu $P_2$, algebarskih polinoma ne višeg stepena od drugog, naći najbolju mini-max aproksimaciju za funkciju $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ na segmentu $[-1,1]$. Odrediti veličinu najbolje aproksimacije (maksimalno odstupanje).

**Rešenje.** Za određivanje koeficijenata polinoma najbolje mini-max aproksimacije $P_2^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, na osnovu teoreme o Čebiševljevoj alternansi (videti [2, str. 118–119]), potrebno je naći $n+2 = 4$ ($n = \operatorname{dg} P_2^*$) tačke $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ takve da je

$$\delta_2^*(x_0) = -\delta_2^*(x_1) = \delta_2^*(x_2) = -\delta_2^*(x_3) = \pm\Delta\,, \tag{1}$$

gde su

$$\delta_2^*(x) = \frac{1}{1+x^2} - P_2^*(x), \quad \Delta = \|\delta_2^*\|_\infty = \max_{|x|\le 1} |\delta_2^*(x)|\,.$$

Zbog simetrije problema može se uzeti $a_1 = 0$, a za tačke $x_k$ $(k = 0,1,2,3)$, na primer, $x_0 = -t,\ x_1 = 0,\ x_2 = t,\ x_3 = 1$, gde je $t$ $(0 < t < 1)$ tačka u kojoj $\delta_2^*$ dostiže ekstremnu vrednost. Dakle, $t$ je pozitivan koren jednačine

$$\frac{d}{dt}\,\delta_2^*(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} - 2a_2 t = 0\,. \tag{2}$$

Kako je, na osnovu (1),

$$-(1-a_0) = \frac{1}{1+t^2} - a_0 - a_2 t^2 = -\left(\frac{1}{2} - a_0 - a_2\right),$$

lako nalazimo $a_2 = -\dfrac{1}{2}$, a dalje iz (2) sleduje $t^2 = \sqrt{2} - 1$ pa je $a_0 = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}$. Prema tome

$$P_2^*(x) = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\,x^2\,.$$

Veličinu maksimalnog odstupanja (koje je minimalno u skupu algebarskih polinoma ne višeg stepena od drugog) možemo odrediti, na primer, na sledeći način

$$\|\delta_2^*\|_\infty = \max_{|x|\le 1} |\delta_2^*(x)| = |\delta_2^*(x)|_{x=0} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\,.$$

**6.2.28.** Naći najbolju Čebiševljevu mini-max aproksimaciju za funkciju $x \mapsto f(x) = 0$ na intervalu $[-1,1]$, pomoću funkcije oblika $P_2(x) = ax^2 + bx + 1$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

**Rešenje.** Cilj je odrediti parametre $a$ i $b$ tako tako da veličina

$$E(f) = \max_{-1\le x\le 1}|ax^2 + bx + 1 - f(x)| = \max_{-1\le x\le 1}|ax^2 + bx + 1|$$

bude minimalna. Za $x = 0$ važi $ax^2 + bx + 1 = 1$, pa je $E(f) \ge 1$, te ako se $a$ i $b$ mogu odrediti tako da je $E(f) = 1$, onda je to i $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} E(f)$.

S obzirom na simetriju problema, zaključujemo da je $b = 0$ pa je $P_2(x) = ax^2+1$, gde je $a < 0$. Najzad, iz uslova

$$-1 \le ax^2 + 1 \le 1 \quad (x \in [-1, 1])$$

dobijamo da $-2 \le a \le 0$. Ovo znači da je svaki polinom $P_2^*(x) = ax^2 + 1$, $a \in [-2, 0]$, najbolji mini-max polinom iz klase polinoma $P_2(x) = ax^2+bx+1$ $(a, b \in \mathbb{R})$ za funkciju $f(x) \equiv 0$ na intervalu $[-1, 1]$.

**6.2.29.** Za polinom trećeg stepena $P_3(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, na $[-1, 1]$ naći u skupu polinoma ne višeg stepena od drugog:

a) najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju sa Čebiševljevom težinom,

b) najbolju mini-max aproksimaciju.

Komentarisati dobijene rezultate.

**Rešenje.** Posmatrajmo opštiji problem od problema datog u zadatku. Naime, razmotrimo problem aproksimacije polinoma $P_{n+1}(x)$ stepena $n + 1$ na segmentu $[-1, 1]$, pomoću polinoma $n$-tog stepena.

Polinom $P_{n+1}(x)$ možemo predstaviti pomoću Čebiševljevih polinoma $T_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$ u obliku (videti zadatak 6.2.16)

$$P_{n+1}(x) = C_0T_0(x) + C_1T_1(x) + \cdots + C_nT_n(x) + C_{n+1}T_{n+1}(x), \tag{1}$$

gde su $C_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$ odgovarajuće konstante.

Snižavajući stepen ovog polinoma za jedan tako što „ukinemo“ član sa polinomom $T_{n+1}(x)$, tj. sprovodeći postupak ekonomizacije (videti zadatak 6.2.16), dobijamo polinom

$$Q_n(x) = C_0T_0(x) + C_1T_1(x) + \cdots + C_nT_n(x)\,. \tag{2}$$

S obzirom da Čebiševljevi polinomi zadovoljavaju nejednakost $|T_k(x)| \le 1$ $(x \in [-1, 1])$, $k = 0, 1, \ldots,$ imamo ocenu

$$|P_{n+1}(x) - Q_n(x)| \le |C_{n+1}| \quad (x \in [-1, 1])\,.$$

Istovremeno, ovim jednostavnim postupkom dobili smo polinom $Q_n(x)$ koji, u skupu polinoma ne višeg stepena od $n$-tog, predstavlja najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na segmentu $[-1,1]$ sa Čebiševljevom težinskom funkcijom $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ako stavimo

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)g(x)\,dx,$$

na osnovu (1), vidimo da za koeficijente polinoma $P_{n+1}(x)$ važi

$$(P_{n+1},T_k)=C_k(T_k,T_k)\quad(k=0,1,\ldots,n),$$

tj.

$$C_k=\frac{(P_{n+1},T_k)}{(T_k,T_k)}\quad(k=0,1,\ldots,n),$$

što su poznate formule za koeficijente u (2) pri sprovođenju postupka srednje-kvadratne aproksimacije nad funkcijom $x\mapsto P_{n+1}(x)$ (naravno na $[-1,1]$ sa težinom $x\mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$).

No, polinom $Q_n(x)$ predstavlja, u skupu polinoma stepena ne višeg od $n$-tog, isto tako i najbolju mini-max aproksimaciju za polinom $x\mapsto P_{n+1}(x)$ na segmentu $[-1,1]$.

Zaista, funkcija greške koju činimo kada polinom $P_{n+1}(x)$ aproksimiramo polinomom $Q_n(x)$ je data sa

$$\delta_n(x)=P_{n+1}(x)-Q_n(x)=C_{n+1}T_{n+1}(x)\,.$$

Čebiševljev polinom se može napisati u obliku $T_{n+1}(x)=\cos\left[(n+1)\arccos x\right]$ za $x\in[-1,1]$, pa je

$$T_{n+1}(x)=\mp 1\qquad\text{za}\quad x_k=-\cos\frac{k\pi}{n+1}\quad(k=0,1,\ldots,n+1),$$

pri čemu je $-1=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=1$. Na osnovu ovoga, zaključujemo da na $[-1,1]$ postoje $n+2$ tačke u kojima je $T_{n+1}(x_k)=(-1)^{n+k+1}$. Dakle,

$$\delta_n(x_k)=(-1)^{n+k+1}C_{n+1}\qquad\text{i}\qquad\max_{x\in[-1,1]}|\delta_n(x)|=|C_{n+1}|,$$

pa na osnovu teoreme o Čebiševljevoj alternansi (videti [2, str. 118–119]) zaključujemo da je $Q_n(x)$ najbolja mini-max aproksimacija za $P_{n+1}(x)$ $(x\in[-1,1])$.

Iskoristimo sada ovo opšte razmatranje na rešavanje našeg zadatka.

S obzirom da je (videti zadatak 6.2.16)

$$x^3=\frac{1}{4}\left(3T_1(x)+T_3(x)\right)$$

imamo

$$P_3(x) = a \cdot \frac{1}{4}\,(3T_1(x) + T_3(x)) + bx^2 + cx + d.$$

Opisanim postupkom ekonomizacije dobijamo

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= a \cdot \frac{1}{4}\,(3T_1(x)) + bx^2 + cx + d \quad (T_1(x) = x) \\ &= bx^2 + \left(\frac{3a}{4} + c\right) x + d. \end{aligned}$$

Dakle, polinom $Q_2(x)$, u skupu polinoma stepena ne višeg od drugog, predstavlja i najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju na $[-1, 1]$ sa Čebiševljevom težinom i najbolju mini-max aproksimaciju na $[-1, 1]$, za polinom $P_3(x)$.

**6.2.30.** Korišćenjem Rémèsovog algoritma naći mini-max aproksimaciju funkcije $x \mapsto f(x) = |x|$ na segmentu $[-1, 1]$, u skupu polinoma stepena $n \leq 2$.

**Rešenje.** Samo u relativno malom broju konkretnih slučajeva moguće je tačno odrediti mini-max aproksimaciju neke funkcije korišćenjem teoreme o Čebiševljevoj alternansi. To je logična posledica toga što neposrednim korišćenjem pomenute teoreme dolazimo, u opštem slučaju, do sistema nelinearnih jednačina.

Međutim, oslanjajući se na teoremu o Čebiševljevoj alternansi konstruišu se algoritmi za približno određivanje mini-max aproksimacije date funkcije, kod kojih je otklonjen ovaj nedostatak. Jedan od najprikladnijih algoritama je Rémèsov algoritam, čija se jedna varijanta može iskazati na sledeći način:

1° Izabere se skup od $n+2$ sukcesivne tačke $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sa segmenta $[a, b]$, na kome se traži aproksimacija date funkcije i odrede se koeficijenti polinoma $P_n$ i veličina $E$ tako da je

$$f(x_k) - P_n(x_k) = (-1)^k E \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1)\,. \tag{1}$$

2° Na $[a, b]$ se odredi skup od $n + 2$ tačke $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n+1}$ u kojima $\delta_n(x) = f(x) - P_n(x)$ ima sukcesivne lokalne ekstremume sa alternativnim znacima, uključujući u ovaj skup, eventualno, jednu (onu u kojoj je veća vrednost $|\delta_n(x)|$) ili obe krajnje tačke segmenta.

3° Za unapred zadatu tačnost $\varepsilon$ proveravaju se uslovi

$$|\hat{x}_k - x_k| < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Ukoliko bar jedan od ovih uslova nije zadovoljen uzima se $x_k := \hat{x}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ i prelazi na 1°. U slučaju da su pomenuti uslovi ispunjeni, algoritam se završava i polinom $P_n$ se uzima kao najbolja mini-max aproksimacija $P_n^*$.

Primenimo sada ovaj algoritam za rešavanje problema datog zadatkom, usvajajući tačnost $\varepsilon = 10^{-3}$.

Na osnovu koraka 1° algoritma, biramo $n+2=4$ tačke sa segmenta $[-1,1]$, na primer,

$$x_0 = -\frac{2}{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}\,.$$

Aproksimacioni polinom je oblika $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, pa na osnovu (1), tj.

$$|x_k| - \big(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2\big) = (-1)^k E \qquad (k = 0,1,2,3)$$

dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
a_0 - \frac{2}{3}\,a_1 + \frac{4}{9}\,a_2 + E &= \frac{2}{3}\,,\\
a_0 - \frac{1}{3}\,a_1 + \frac{1}{9}\,a_2 - E &= \frac{1}{3}\,,\\
a_0 + \frac{1}{3}\,a_1 + \frac{1}{9}\,a_2 + E &= \frac{1}{3}\,,\\
a_0 + \frac{2}{3}\,a_1 + \frac{4}{9}\,a_2 - E &= \frac{2}{3}\,,
\end{aligned}$$

odakle nalazimo $a_0 = 2/9,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ E = 0$.

Prema koraku 2° algoritma, formiramo funkciju $\delta_2(x) = |x| - \dfrac{2}{9} - x^2$. Kako je $\delta_2'(x) = \operatorname{sgn} x - 2x$ $(x \neq 0)$, tačke lokalnog ekstremuma su $x = -\dfrac{1}{2}$ i $x = \dfrac{1}{2}$. U tački $x = 0$ funkcija $\delta_2(x)$ nije diferencijabilna, no lako se utvrđuje da je tačka $x = 0$ tačka lokalnog minimuma funkcije $\delta_2(x)$. S obzirom da smo odredili tri tačke lokalnog ekstremuma funkcije $\delta_2(x)$, a potrebne su nam $n+2=4$ tačke, uzmimo još i tačku $x = 1$ $(\delta_2(-1) = \delta_2(1))$. Kako funkcija $\delta_2(x)$ u tačkama $-\dfrac{1}{2}$, $0$, $\dfrac{1}{2}$, $1$ alternativno menja znak, to je, dakle,

$$\hat{x}_0 = -\frac{1}{2}, \quad \hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2}, \quad \hat{x}_3 = 1.$$

Na osnovu koraka 3° algoritma, proveravamo da li su zadovoljeni uslovi

$$|\hat{x}_k - x_k| < 10^{-3} \quad (k = 0,1,2,3).$$

S obzirom da uslovi nisu zadovoljeni, uzima se $x_k := \hat{x}_k$ $(k = 0,1,2,3)$, tj. $x_0 = -\dfrac{1}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 1$ i prelazi na korak 1° algoritma.

Sada, na osnovu 1°, dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_0 - \frac{1}{2}\,a_1 + \frac{1}{4}\,a_2 \ + E &= \frac{1}{2}\,,\\
a_0 \qquad\qquad\qquad - E &= 0\,,\\
a_0 + \frac{1}{2}\,a_1 + \frac{1}{4}\,a_2 \ + E &= \frac{1}{2}\,,\\
a_0 + \quad a_1 + \quad a_2 \ - E &= 1\,,
\end{aligned}
$$

odakle nalazimo $a_0 = E = 1/8,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$.

Na osnovu 2° imamo $\delta_2(x) = |x| - \dfrac{1}{8} - x^2$, te postupajući slično kao u prethodnom koraku 2°, nalazimo $\hat{x}_0 = -\dfrac{1}{2},\ \hat{x}_1 = 0,\ \hat{x}_2 = \dfrac{1}{2},\ \hat{x}_3 = 1$.

Kako je sada, na osnovu 3°, $|\hat{x}_k - x_k| = 0 < 10^{-3}$ $(k = 0,1,2,3)$ algoritam se završava i polinom

$$P_2(x) = \frac{1}{8} + x^2$$

se uzima kao najbolja mini-max aproksimacija.

Primetimo da u ovom jednostavnom slučaju $P_2(x)$ i jeste najbolja mini-max aproksimacija.

# VII GLAVA

# Numeričko diferenciranje i numerička integracija

## 7.1. Numeričko diferenciranje

**7.1.1.** Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ dovoljan broj puta neprekidno-diferencijabilna i neka su date njene vrednosti $f_i \equiv f(x_i)$ u ekvidistantnim tačkama $x_i = x_0 + ih$ $(i = -1, 0, 1)$, $h = \text{const}$. Dokazati da važe formule:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{1}{2} f''(x_0) h + O(h^2),\\
f'(x_0) &= \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + \frac{1}{2} f''(x_0) h + O(h^2),\\
f'(x_0) &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{1}{6} f'''(x_0) h^2 + O(h^4),\\
f''(x_0) &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{1}{12} f^{(4)}(x_0) h^2 + O(h^4)\,.
\end{aligned}
$$

**Rešenje.** Polazeći od Taylorovih razvoja

$$
\begin{aligned}
f_1 \equiv f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) h + \frac{1}{2!} f''(x_0) h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0) h^3 + \cdots\,,\\
f_{-1} \equiv f(x_0 - h) &= f(x_0) - \frac{1}{1!} f'(x_0) h + \frac{1}{2!} f''(x_0) h^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_0) h^3 + \cdots\,,
\end{aligned}
$$

lako dokazujemo prethodne formule koje se često koriste za aproksimaciju prvog i drugog izvoda funkcije. Tako, na primer, imamo

$$
f'(x_0) \cong \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \quad f''(x_0) \cong \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}
$$

pri čemu činimo grešku koja je beskonačno mala veličina istog reda kao i $h^2$ kada $h \to 0$, tj. $O(h^2)$.

**7.1.2.** Odrediti koeficijente $a_{ik}$ $(i, k = 0, 1, \dots, n)$ u formuli za numeričko diferenciranje

$$f'(x_i) \cong \sum_{k=0}^{n} a_{ik} f(x_k) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \tag{1}$$

tako da ona bude tačna za svako $f \in \mathcal{P}_n$, gde je $\mathcal{P}_n$ skup polinoma ne višeg od $n$-tog stepena i $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$.

**Rešenje.** Ideje za približno nalaženje izvoda funkcije $x \mapsto f(x)$ se zasnivaju na aproksimaciji funkcije $f$ pogodnom funkcijom $\varphi$ i uzimanjem da je $f^{(k)}(x) \cong \varphi^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$.

U cilju određivanja koeficijenata $a_{ik}$ $(i, k = 0, 1, \dots, n)$ u formuli (1), aproksimirajmo funkciju $x \mapsto f(x)$ Lagrangeovim interpolacionim polinomom $x \mapsto P_n(x)$ na osnovu skupa podataka $(x_k, f(x_k))_{k=0,1,\dots,n}$. Tada je

$$f(x) \cong P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k),$$

gde je

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n\,.$$

Sada je

$$f'(x) \cong P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k'(x) f(x_k), \tag{2}$$

pa za $x = x_i$ imamo

$$f'(x_i) \cong P_n'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} L_k'(x_i) f(x_k), \quad i = 0, 1, \dots, n\,. \tag{3}$$

Primetimo da je $x \mapsto L_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ polinom $n$-tog stepena, dakle funkcija koja je beskonačno puta neprekidno-diferencijabilna. Ako uvedemo $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, tada je

$$L_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} & (x \neq x_k)\,, \\ \quad 1 & (x = x_k)\,, \end{cases}$$

odakle

$$L_k'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega'(x_k)} \dfrac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{(x-x_k)^2}, & \text{za} \quad x \neq x_k\,, \\[2ex] \dfrac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}\,, & \text{za} \quad x = x_k\,, \end{cases}$$

s obzirom da je

$$\lim_{x\to x_k} \frac{1}{\omega'(x_k)} \frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{(x-x_k)^2} = \lim_{x\to x_k} \frac{1}{\omega'(x_k)} \frac{\omega''(x)(x-x_k)+\omega'(x)-\omega'(x)}{2(x-x_k)}$$
$$= \frac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}\,.$$

Sada je, na osnovu (2), važi

$$f'(\xi) \cong \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega'(\xi)(\xi-x_k)-\omega(\xi)}{\omega'(x_k)(\xi-x_k)^2} f(x_k) \quad (\xi \neq x_i,\ i=0,1,\ldots,n)\,, \tag{4}$$

a na osnovu (3)

$$f'(x_i) \cong \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{\omega'(x_i)}{\omega'(x_k)(x_i-x_k)} f(x_k) + \frac{\omega''(x_i)}{2\omega'(x_i)} f(x_i) \quad (i=0,1,\ldots,n). \tag{5}$$

Primetimo da za svako $f \in \mathcal{P}_n$ važi da je $f = \mathcal{P}_n$, pa su dakle formule (5) i (6) tačne za za svako $f \in \mathcal{P}_n$ i mogu poslužiti za nalaženje izvoda funkcije $x \mapsto f(x)$ ako su poznate vrednosti funkcije $f$ u tačkama $x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ i naravno pod pretpostavkom da je funkcija $f$ diferencijabilna. S obzirom na ove činjenice, poređenjem (1) i (6) zaključujemo da je

$$a_{ik} = \frac{\omega'(x_i)}{\omega'(x_k)(x_i-x_k)} \qquad (k \neq i)\,, \tag{6}$$

$$a_{ii} = \frac{\omega''(x_i)}{2\omega'(x_i)} \tag{7}$$

za $i,k = 0,1,\ldots,n$.

Lako je uočiti da se koeficijentima iz (6) i (7) može dati i ovakva forma

$$a_{ik} = \frac{1}{x_i-x_k} \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_k-x_j} \quad (k\neq i), \qquad a_{ii} = \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}\,.$$

**7.1.3.** Na osnovu skupa podataka

| $x$ | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.5095 | 1.6984 | 1.9043 | 2.1293 | 2.3756 |

približno izračunati $f'(1.4)$ i $f''(1.4)$. Dobijene rezultate uporediti sa tačnim vrednostima $f'(1.4) = \cosh(1.4) \cong 2.1509$ i $f''(1.4) = \sinh(1.4) \cong 1.9043$.

**Rešenje.** Aproksimirajmo funkciju $x \mapsto f(x)$ interpolacionim polinomom $x \mapsto P_4(x)$. S obzirom da je $f(x) \sim P_4(x)$, imamo $f^{(k)}(x) \sim P_4^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Kako su interpolacioni čvorovi $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ ekvidistantni $(x_0 = 1.2,\ h = 0.1)$, možemo konstruisati na primer, prvi Newtonov interpolacioni polinom:

$$\begin{aligned} P_4(x) = f_0 + p\,\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0 \\ + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}\,\Delta^4 f_0\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} P_4(x) = f_0 + p\,\Delta f_0 + \frac{p^2-p}{2}\,\Delta^2 f_0 + \frac{p^3-3p^2+2p}{6}\,\Delta^3 f_0 \\ + \frac{p^4-6p^3+11p^2-6p}{24}\,\Delta^4 f_0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

gde je $p = (x - x_0)/h$. S obzirom da je

$$P_4'(x) = \frac{dP_4}{dp}\,\frac{dp}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dP_4}{dp}\,,$$

diferenciranjem jednakosti (1), dobijamo

$$\begin{aligned} P_4'(x) = \frac{1}{h}\biggl(\Delta f_0 + \frac{2p-1}{2}\,\Delta^2 f_0 + \frac{3p^2-6p+2}{6}\,\Delta^3 f_0 \\ + \frac{2p^3-9p^2-11p-3}{12}\,\Delta^4 f_0\biggr)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

a dalje, diferenciranjem (2), imamo

$$P_4''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 + (p-1)\,\Delta^3 f_0 + \frac{6p-18p+11}{12}\,\Delta^4 f_0\right). \tag{3}$$

Formirajmo sada, na osnovu skupa podataka datog zadatkom, tablicu konačnih razlika operatora $\Delta$:

| | $x_k$ | $f_k$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.2 | 1.5095 | | | | |
| | | | 0.1889 | | | |
| 1 | 1.3 | 1.6984 | | 0.0170 | | |
| | | | 0.2059 | | 0.0021 | |
| 2 | 1.4 | 1.9043 | | 0.0191 | | 0.0001 |
| | | | 0.2250 | | 0.0022 | |
| 3 | 1.5 | 2.1293 | | 0.0213 | | |
| | | | 0.2463 | | | |
| 4 | 1.6 | 2.3756 | | | | |

Na osnovu formule (2), uzimajući $x = x_2 = 1.4$, tj. $p = (x_2 - x_0)/h = 2$, i korišćenjem tablice konačnih razlika, imamo

$$(1.4)\quad f'(1.4) \cong P_4'(1.4) = \frac{1}{0.1}\left(0.1889 + \frac{3}{2}\,0.0170 + \frac{1}{3}\,0.0021 - \frac{1}{12}\,0.0001\right) \cong 2.1509,$$

dok je na osnovu formule (3)

$$(5)\qquad f''(1.4) \cong P_4''(1.4) = \frac{1}{(0.1)^2}\left(0.0170 + 0.0021 - \frac{1}{12}\,0.0001\right) \cong 1.9092\,.$$

Upoređivanjem dobijenih rezultata sa tačnim, uočavamo da greška raste sa povećanjem reda izvoda.

Primetimo da smo u formulama (2) i (3) koristili sve „raspoložive informacije“ o datoj funkciji.

Postupimo sada na jedan drugačiji način uzimajući da su $x_0 = 1.4$, $x_1 = 1.5$ i $x_2 = 1.6$. Izvodi odgovarajućeg interpolacionog polinoma $Q_3(x)$ su sada

$$Q_3'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{2p-1}{2}\,\Delta^2 f_0\right) \qquad \text{i} \qquad Q_3''(x) = \frac{1}{h^2}\,\Delta^2 f_0\,.$$

Kako je sada $x = x_0 = 1.4$, tj. $p = 0$, imamo (videti u tabeli vrednosti ispod linije)

$$(6)\qquad f'(1.4) \cong Q_3'(1.4) = \frac{1}{0.1}\left(0.2250 - \frac{1}{2}\,0.0213\right) = 2.1435\,,$$

$$(7)\qquad f''(1.4) \cong Q_3''(1.4) = \frac{1}{(0.1)^2}\,0.0213 = 2.13\,.$$

Primećujemo da su dobijeni rezultati dosta „slabiji“ od odgovarajućih rezultata u (4) i (5). To je i logično s obzirom na smanjenu „količinu informacija“ o funkciji, koju smo sada koristili.

Razvijmo sada operator diferenciranja $D$ po stepenima operatora prednje razlike $\Delta$. Kako je, na osnovu Taylorove formule,

$$Ef(x) = f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \cdots\,,$$

tj.

$$Ef(x) = \left(1 + \frac{Dh}{1!} + \frac{(Dh)^2}{2!} + \cdots\right) f(x) = e^{hD} f(x)\,,$$

sleduje

$$E = e^{hD}\,. \tag{8}$$

S druge strane imamo

$$\Delta f(x) = f(h+x) - f(x) = (E-1)f(x),$$

odakle sleduje $\Delta = E - 1$, tj. $E = 1 + \Delta$. Na osnovu (8) imamo

$$D = \frac{1}{h}\log(1+\Delta)\,. \tag{9}$$

S obzirom da je

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\,,$$

dobijamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,.$$

Formalno, zamenjujući $x$ operatorom $\Delta$, na osnovu (9), imamo

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\,\Delta^2 + \frac{1}{3}\,\Delta^3 - \frac{1}{4}\,\Delta^4 + \cdots\right)\,, \tag{10}$$

a dalje, stepenovanjem,

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\,\Delta^4 - \cdots\right)\,. \tag{11}$$

Koristeći jednakost (10), a s obzirom na konačnost tabele konačnih razlika, imamo

$$Df_2 = f'(1.4) \cong \frac{1}{h}\left(\Delta f_2 - \frac{1}{2}\,\Delta^2 f_2\right) = \frac{1}{0.1}\left(0.2250 - \frac{1}{2}\,0.0213\right) = 2.1435\,,$$

dok je na osnovu (11),

$$D^2 f_2 = f''(1.4) \cong \frac{1}{h^2}\,\Delta^2 f_2 = \frac{1}{(0.1)^2}\,0.0213 = 2.13\,.$$

Dobijeni rezultati su identični sa rezultatima u (6) i (7).

Primetimo, međutim, da bi vrednosti izvoda u tački $x = x_0$ $(p = 0)$ dobijene na osnovu (2) i (3) bile jednake onim koje bi se dobile na osnovu razvoja (10) i (11) primenjenih na $f_0$.

**7.1.4.** Na osnovu skupa podataka

| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.1752 | 1.3356 | 1.5095 | 1.6984 | 1.9043 |

približno izračunati $f'(1.2)$ i $f''(1.2)$. Dobijene rezultate uporediti sa tačnim vrednostima $f'(1.2) = \cosh(1.2) \cong 1.8107$, $f''(1.2) = \sinh(1.2) \cong 1.5095$.

**Rešenje.** Zadatak je sličan prethodnom zadatku, međutim sada ćemo pristupiti njegovom rešavanju na drugačiji način.

Ranije smo izveli formule

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1}{24}\,\delta^3 + \frac{3}{640}\,\delta^5 - \cdots\right) \tag{1}$$

(videti zadatak 6.1.19),

$$D = \frac{\mu}{h}\left(\delta - \frac{1}{6}\,\delta^3 + \frac{1}{30}\,\delta^5 - \cdots\right) \tag{2}$$

(videti zadatak 6.1.20).

Na osnovu formule (1) imamo

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta - \frac{1}{12}\,\delta^4 + \frac{1}{90}\,\delta^6 - \cdots\right)\,. \tag{3}$$

Formirajmo sada tablicu centralnih razlika:

| $x$ | $f$ | $\delta f$ | $\delta^2 f$ | $\delta^3 f$ | $\delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 1.1752 | | | | |
| | | 0.1604 | | | |
| 1.1 | 1.3356 | | 0.0135 | | |
| | | 0.1739 | | 0.0015 | |
| 1.2 | 1.5095 | | 0.0150 | | 0.0005 |
| | | 0.1889 | | 0.0020 | |
| 1.3 | 1.6984 | | 0.0170 | | |
| | | 0.2059 | | | |
| 1.4 | 1.9043 | | | | |

koju treba shvatiti po sledećoj šemi:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & \delta^4 f_0\,. \\
 & & \delta f_{1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & \\
x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 & & \\
 & & \delta f_{3/2} & & & \\
x_2 & f_2 & & & &
\end{array}
$$

S obzirom da je

$$\mu\delta^k f_i = \delta^k \mu f_i = \delta^k \,\frac{1}{2}\left(f_{i+1/2} + f_{i-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^k f_{i+1/2} + \delta^k f_{i-1/2}\right),$$

na osnovu formule (2) sa $h = 0.1$ i korišćenjem tablice centralnih razlika, nalazimo

$$f'(1.2) = Df(1.2) = Df_0 \cong \frac{1}{0.1}\left(\frac{0.1739 + 0.1889}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{0.0015 + 0.002}{2}\right) \cong 1.8111\,.$$

Slično, na osnovu formule (3), imamo

$$f''(1.2) = D^2 f(1.2) = D^2 f_0 \cong \frac{1}{(0.1)^2}\left(0.015 - \frac{1}{12}\,0.0005\right) \cong 1.4958\,.$$

Upoređivanjem dobijenih rezultata sa tačnim, primećujemo da greška raste sa povećanjem reda izvoda.

Primetimo da bi se isti rezultati dobili i da smo koristili formule (2) i (3) iz prethodnog zadatka.

Uočimo, najzad, da se formula (1) može uspešno primeniti i na određivanje $Df(x_i + h/2) = Df_{i+1/2}$. Na primer,

$$\begin{aligned}
f'(1.15) = Df(1.15) = Df_{-1/2} &\cong \frac{1}{h}\left(\delta f_{-1/2} - \frac{1}{24}\,\delta^3 f_{-1/2}\right) \\
&\cong \frac{1}{0.1}\left(0.1739 - \frac{1}{24}\,0.0015\right) \cong 1.7383\,,
\end{aligned}$$

a tačna vrednost je $f'(1.15) = \cosh(1.15) \cong 1.7374$.

**7.1.5.** Na osnovu skupa podataka

| $x$ | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.1519 | 5.6285 | 6.1229 | 6.6355 |

približno izračunati $f'(2.4)$ i $f''(2.4)$. Dobijene rezultate uporediti sa tačnim vrednostima zaokruženim na četiri decimale $f'(2.4) \cong 5.2167$, $f''(2.4) \cong 1.8264$.

**Rešenje.** Razvijmo operator diferenciranja $D$ po stepenima operatora zadnje razlike $\nabla$. S obzirom da je

$$E = e^{hD}$$

(videti (8) u zadatku 7.1.3) i

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = (1 - E^{-1})f(x) \qquad (h = \text{const} > 0),$$

tj.

$$E = (1 - \nabla)^{-1},$$

imamo

$$D = \frac{1}{h} \log \left( (1 - \nabla)^{-1} \right) . \tag{1}$$

Na osnovu

$$\left( \log \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ,$$

integracijom dobijamo

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots .$$

Formalno, zamenjujući $x$ operatorom $\nabla$, na osnovu (1), imamo

$$D = \frac{1}{h} \left( \nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \cdots \right) , \tag{2}$$

a dalje stepenovanjem,

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \left( \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \cdots \right) . \tag{3}$$

Formirajmo sada tablicu konačnih razlika sa operatorom $\nabla$:

| $x$ | $f$ | $\nabla f$ | $\nabla^2 f$ | $\nabla^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.1 | 5.1519 | | | |
| | | 0.4766 | | |
| 2.2 | 5.6285 | | 0.0178 | |
| | | 0.4944 | | 0.0004 |
| 2.3 | 6.1229 | | 0.0182 | |
| | | 0.5126 | | |
| 2.4 | 6.6355 | | | |

Na osnovu formule (2) sa $h = 0.1$ i korišćenjem tablice razlika imamo

$$f'(2.4) = Df(2.4) \cong \frac{1}{0.1}\left(0.5126 + \frac{1}{2}\,0.0182 + \frac{1}{3}\,0.0004\right) \cong 5.2183\,,$$

dok je na osnovu formule (3),

$$f''(2.4) = D^2 f(2.4) = \frac{1}{(0.1)^2}\,(0.0182 + 0.0004) = 1.86\,.$$

**7.1.6.** Razviti operator diferenciranja $D$ po operatorima centralne razlike $\delta$. Na osnovu dobijene formule i na osnovu skupa podataka

| $x$ | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.5095 | 1.6984 | 1.9043 | 2.1293 | 2.3756 |

približno odrediti $f'(1.35)$ i $f''(1.4)$.

**Rešenje.** Prvi deo zadatka urađen je u prethodnoj glavi ove zbirke (odeljak o interpolaciji) i pritom je dobijeno da je

$$D = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{[(2k-1)!!]^2}{2^{2k}(2k+1)!}\;\delta^{2k+1},$$

ili, u razvijenom obliku,

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \cdots\right). \tag{1}$$

Kvadriranjem (1) nalazimo

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta - \frac{1}{12}\delta^4 + \cdots\right).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\delta f(x) &= f\Big(x+\frac{h}{2}\Big) - f\Big(x-\frac{h}{2}\Big),\\
\delta^2 f(x) &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h),\\
\delta^3 f(x) &= f\Big(x+\frac{3h}{2}\Big) - 3f\Big(x+\frac{h}{2}\Big) + 3f\Big(x-\frac{h}{2}\Big) - 3f\Big(x-\frac{3h}{2}\Big),\\
\delta^4 f(x) &= f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h),
\end{aligned}$$

imamo redom

$$\begin{aligned}
\delta f(1.35) &= f(1.4) - f(1.3) = 0.2059,\\
\delta^2 f(1.4) &= f(1.5) - 2f(1.4) + f(1.3) = 0.0191,\\
\delta^3 f(1.35) &= f(1.5) - 3f(1.4) + 3f(1.3) - f(1.2) = 0.0021,\\
\delta^4 (1.4) &= f(1.6) - 4f(1.5) + 6f(1.4) - 4f(1.3) + f(1.2) = 0.0001.
\end{aligned}$$

Najzad, dobijamo da su

$$\begin{aligned}
f'(1.35) = Df(1.35) &\cong \frac{1}{0.1}\Big(\delta f(1.35) - \frac{1}{24}\delta^3 f(1.35)\Big) = 2.058125,\\
f''(1.4) = D^2 f(1.4) &\cong \frac{1}{0.1^2}\Big(\delta^2 f(1.4) - \frac{1}{12}\delta^4 f(1.4)\Big) = 1.90917.
\end{aligned}$$

**7.1.7.** Neka su u tačkama $x_e,\ x_i,\ x_r$ poznate vrednosti funkcije, označene respektivno sa $y_e,\ y_i,\ y_r$. Približno izračunati $y_i'' = y''(x_i)$.

**Rešenje.** Na osnovu datog skupa podataka možemo konstruisati interpolacioni polinom drugog stepena, koji ćemo predstaviti u obliku

$$P(x) = A\,(x-x_i)^2 + B\,(x-x_i) + C\,. \tag{1}$$

Ako stavimo da je $x_i - x_e = h,\ x_r - x_i = ah$ ($h = \text{const} > 0$), gde je $a = (x_r - x_i)\,/\,(x_i - x_e)$, na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned}
P(x_e) &= y_e = Ah^2 - Bh + C\,,\\
P(x_i) &= y_i = C\,,\\
P(x_r) &= y_r = a^2 Ah^2 + aBh + C\,,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$Ah^2 a(a+1) = y_r - (1+a)\,y_i + a\,y_e\,.$$

S obzirom da je drugi izvod parabole (1) jednak $2A$, to za približnu vrednost $y_i''$, u oznaci $\bar{y}_i''$, možemo uzeti

$$\bar{y}_i'' = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{2}{a(a+1)} \left(y_r - (1+a)\, y_i + a\, y_e\right) . \tag{2}$$

Pod pretpostavkom da je funkcija $y(x)$ dovoljan broj puta neprekidno diferencijabilna, na osnovu Taylorove formule imamo

$$y_r = y\,(x_i + ah) = y_i + ah\, y_i' + \frac{a^2h^2}{2}\, y_i'' + \frac{a^3h^3}{6}\, y_i''' + \frac{a^4h^4}{24}\, y_i^{(4)} + \cdots ,$$
$$y_e = y\,(x_i - h) = y_i - h\, y_i' + \frac{h^2}{2}\, y_i'' - \frac{h^3}{3}\, y_i''' + \frac{h^4}{24}\, y_i^{(4)} - \cdots ,$$

pa zamenom u jednakost (2), dobijamo

$$\bar{y}_i'' = y_i'' - (a-1)\, \frac{h}{3}\, y''' + \left(a^2 - a + 1\right) \frac{h^2}{12}\, y_i^{(4)} + \cdots .$$

Dakle,

$$\bar{y}_i'' = \begin{cases} y_i'' + O(h)\,, & a \neq 1, \\ y_i'' + O(h^2)\,, & a = 1\,. \end{cases}$$

U slučaju kada je $a = 1$, tj. kada su interpolacioni čvorovi ekvidistantni ($x_i = x_e + h,\ x_r = x_e + 2h$), tada je

$$\bar{y}_i'' = \frac{1}{h^2} \left(y_r - 2y_i + y_e\right) ,$$

što je često korišćena aproksimacija drugog izvoda.

**7.1.8.** Data je funkcija tablicom

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.50 | 0.3521 | | | | |
| | | −0.0510 | | | |
| 0.75 | 0.3011 | | −0.0081 | | |
| | | −0.0591 | | 0.0079 | |
| 1.00 | 0.2420 | | −0.0002 | | −0.0016 |
| | | −0.0593 | | 0.0063 | |
| 1.25 | 0.1827 | | 0.0061 | | |
| | | −0.0532 | | | |
| 1.50 | 0.1295 | | | | |

Ispitati da li data funkcija ima tačku prevoja na intervalu interpolacije i ako je odgovor potvrdan odrediti tu tačku.

**Rešenje.** Za izračunavanje drugog izvoda u čvorovima $0.75, 1.00, 1.25$, koristimo formulu (videti zadatke 7.1.1 i 7.1.7)

$$y''(x_0) = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} + O(h^2).$$

Za izračunavanje izvoda u tački $x = 0.50$ koristimo prvi Newtonov interpolacioni polinom

$$\begin{aligned} y(x) \approx y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \\ + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}\Delta^4 y_0, \end{aligned}$$

gde je $p = (x - x_0)/h$. Dakle,

$$y''(0.5) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0\right] = -0.2795.$$

Za izračunavanje izvoda u tački $x = 1.50$ koristimo drugi Newtonov interpolacioni polinom

$$\begin{aligned} y(x) \approx y_4 + p\Delta y_3 + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\Delta^3 y_1 \\ + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{4!}\Delta^4 y_0, \end{aligned}$$

gde je $p = (x - x_4)/h$. Dakle,

$$y''(1.5) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_1 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0\right] = 0.1749.$$

Ovim smo dobili tabelu približnih vrednosti drugog izvoda tabelirane funkcije.

| $k$ | $x_k$ | $y''(x_k) = y''_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.50 | $-0.2795$ |
| 1 | 0.75 | $-0.1296$ |
| 2 | 1.00 | $-0.0032$ |
| 3 | 1.25 | $0.0976$ |
| 4 | 1.50 | $0.1749$ |

Očigledno je $y'' = 0$ za $x \in (1.00, 1.25)$. Da bismo odredili približno tačku prevoja koristimo podatke iz prethodne tabele i primenjujemo inverznu Lagrangeovu interpolaciju. Dakle,

$$x^* = L_4(y'' = 0) = 1.03.$$

**7.1.9.** Koristeći formulu za numeričko diferenciranje

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0 - h)}{2h} = F(h),$$

polovljenjem koraka $h$, izvesti formulu pomoću koje se izračunava $y'(x_0)$ sa greškom reda $h^6$, pretpostavljajući da je funkcija $y$ diferencijabilna proizvoljan broj puta.

**Rešenje.** Kako je

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{y(x_0) + hy'(x_0) + \dfrac{h^2 y''(x_0)}{2!} + \cdots - \left( y(x_0) - hy'(x_0) + \dfrac{h^2 y''(x_0)}{2!} + \cdots \right)}{2h} \\ &= \frac{2hy'(x_0) + \dfrac{h^3}{3} y'''(x_0) + \dfrac{h^5}{60} y^{(5)}(x_0) + \ \cdots}{2h}, \end{aligned}$$

imamo

$$y'(x_0) \approx F(h) = y'(x_0) + \frac{h^2}{6} y'''(x_0) + \frac{h^4}{5!} y^{(5)}(x_0) + \ \cdots \ .$$

Koristeći dobijeni rezultat, polovljenjem koraka, dolazimo do sistema jednačina za nalaženje $y_0'$

$$F(h) - y_0' = Ah^2 + O(h^4), \quad F\Big(\frac{h}{2}\Big) - y_0' = A\frac{h^2}{4} + O(h^4).$$

Određivanjem konstante $A$ iz poslednjeg sistema jednačina dolazimo do formule

$$y_0' = \frac{4F\Big(\dfrac{h}{2}\Big) - F(h)}{3} + O(h^4),$$

tj. $y_0' = F_1(h) + O(h^4)$, gde je

$$F_1(h) = \frac{4F\Big(\dfrac{h}{2}\Big) - F(h)}{3}.$$

Sada je

$$y_0' = F_1(h) + Bh^4 + O(h^6),$$
$$y_0' = F_1\Big(\frac{h}{2}\Big) + B\frac{h^4}{16} + O(h^6).$$

Određivanjem konstante $B$ iz poslednjeg sistema dolazimo do formule

$$y_0' = \frac{16F_1\Big(\dfrac{h}{2}\Big) - F_1(h)}{15} + O(h^6),$$

tj.

$$y_0' = \frac{1}{45}\bigg(64F\Big(\frac{h}{4}\Big) - 20F\Big(\frac{h}{2}\Big) + F(h)\bigg) + O(h^6).$$

**7.1.10.** Oceniti grešku u formuli za drugi izvod

$$f''(x_i) \cong \frac{1}{h^2}\,(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

uzimajući u obzir i greške zaokrugljivanja, a zatim naći optimalnu vrednost za korak $h$ minimizacijom granice apsolutne greške.

**Rešenje.** Sa $\bar f_i$ označimo numeričku vrednost dobijenu zaokruglivanjem tačne vrednosti $f_i = f(x_i)$ na $m$ značajnih cifara u mantisi. Tada za odgovarajuću grešku zaokruglivanja $e_i = \bar f_i - f_i$ važi ocena (videti [1, str. 10])

(1) $$|e_i| \le E = \frac{1}{2}\cdot 10^{-m+k}\,,$$

gde je $k$ karakteristika broja $f_i$. Ovde je uzeta osnova $b = 10$.

Kako je

$$\begin{aligned} D^2 f(x_i) &= \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\,\delta^4 + \frac{1}{90}\,\delta^6 - \cdots\right) f(x_i) \\ &= \frac{1}{h^2}\,\delta^2 f(x_i) - \frac{1}{12h^2}\,h^4 f^{(4)}(\xi_i)\,, \end{aligned}$$

gde su $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$ i $\delta^2 f_i = \delta^2 \bar f_i - \delta^2 e_i$, imamo

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(\bar f_{i+1} - 2\bar f_i + \bar f_{i-1}\right) - R_i\,,$$

gde je

$$R_i = \frac{1}{h^2}\,\delta^2 e_i + \frac{1}{12}\,h^2 f^{(4)}(\xi_i)\,.$$

Neka je $|f^{(4)}(\xi_i)| \le M$. Tada je, s obzirom na (1),

$$|R_i| \le \frac{4E}{h^2} + \frac{h^2 M}{12}\,.$$

Dobijena granica apsolutne greške zavisi od $h$, tj. $\Delta = \dfrac{4E}{h^2} + \dfrac{h^2 M}{12}$. Iz uslova $\dfrac{d\Delta}{dh} = 0$ nalazimo optimalnu vrednost za $h$

$$h = h_{\text{opt}} = \sqrt[4]{\frac{48E}{M}} = \sqrt[4]{\frac{24}{M} \cdot 10^{-m+k}}$$

pri kojoj granica $\Delta$ dostiže minimalnu vrednost

$$\Delta_{\min} = 2\sqrt{\frac{EM}{3}}\,,$$

tj. tada je $|R_i| \le \Delta_{\min}$.

Na primer, ako za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ treba naći $f''(1)$ korišćenjem tablice vrednosti sa 6 značajnih cifara, optimalni korak je

$$h_{\text{opt}} \cong \sqrt{\frac{24 \cdot 16}{15} \cdot 10^{-5}} \cong 0.13$$

jer su $m = 6,\ k = 1,\ M \cong \dfrac{15}{16}$. Dalje smanjivanje koraka ispod $h_{\text{opt}}$ može da dovede do povećanja greške.

## 7.2. Numerička integracija

**7.2.1.** Odrediti koeficijente $A_1,\ A_2,\ A_3$ tako da je kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1\,f(x_1) + A_2\,f(x_2) + A_3\,f(x_3) + R_3(f) \tag{1}$$

tačna za sve algebarske polinome stepena $k \le 2$, ako je:

1° $(a,b) = (-1,1),\ x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3},\ x_3 = \dfrac{1}{3}$;

2° $(a,b) = (-1,1),\ x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$;

3° $(a,b)=(0,1),\ x=-2,\ x_2=-1,\ x_3=0\,.$

Koliki je algebarski stepen tačnosti dobijene formule?

**Rešenje.** Iz uslova $R_3(x^k)=0$ $(k=0,1,2)$, tj. iz sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} A_1 \quad &+ A_2 \quad + A_3 \quad = m_0\,,\\ A_1\,x_1 &+ A_2\,x_2 + A_3\,x_3 = m_1\,,\\ A_1\,x_1^2 &+ A_2\,x_2^2 + A_3\,x_3^2 = m_2\,, \end{aligned}$$

gde je $m_k=\displaystyle\int_a^b x^k\,dx=\frac{1}{k+1}\big(b^{k+1}-a^{k+1}\big)$, nalazimo

(2) $$A_1=\frac{x_2x_3m_0-(x_2+x_3)\,m_1+m_2}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}\,,$$

(3) $$A_2=\frac{x_1x_3m_0-(x_1+x_3)\,m_1+m_2}{(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)}\,,$$

(4) $$A_3=\frac{x_1x_2m_0-(x_1+x_2)\,m_1+m_2}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\,.$$

Analizirajmo sada posebno slučajeve 1°, 2°, 3°.

1° Ovde je $m_k=\dfrac{1}{k+1}\Big(1+(-1)^k\Big)$, tj. $m_0=2$, $m_1=0$, $m_2=\dfrac{2}{3}$ i $x_1=-1$, $x=-\dfrac{1}{3}$, $x_3=\dfrac{1}{3}$, pa na osnovu (2), (3) i (4) imamo $A_1=\dfrac{1}{2}$, $A_2=0$, $A=\dfrac{3}{2}$. Prema tome, u ovom slučaju formula (1) postaje

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\,f(-1)+\frac{3}{2}\,f\left(\frac{1}{3}\right)+R_2(f)\,.$$

Kako je $R_2(x^3)=m_3-\dfrac{1}{2}\,(-1)^3-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{4}{9}\neq 0$, zaključujemo da ova kvadraturna formula ima algebarski stepen tačnosti $p=2$.

2° I ovde je $m_0=2$, $m_1=0$, $m_2=\dfrac{2}{3}$. Kako je $x_3=-x_1=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ i $x_2=0$, imamo $A_1=A_3=\dfrac{5}{9}$, $A_2=\dfrac{8}{9}$, pa je odgovarajuća kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{5}{9}\,f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}\,f(0)+\frac{5}{9}\,f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+R_3(f)\,.$$

Kako je $R_3(x^3) = R_3(x^4) = R_3(x^5) = 0$, $R_3(x^6) = \dfrac{8}{175}$, algebarski stepen tačnosti ove formule je $p = 5$.

3° Kako je ovde $m_k = \dfrac{1}{k+1}$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ imamo $A_1 = \dfrac{5}{12}$, $A_2 = -\dfrac{4}{3}$, $A = \dfrac{23}{12}$. Odgovarajuća kvadraturna formula je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{12}\,f(-2) - \frac{4}{3}\,f(-1) + \frac{23}{12}\,f(0) + R_3(f)\,.$$

Algebarski stepen tačnosti je $p = 2$, jer je $R_3(x^3) = \dfrac{9}{4} \neq 0$. Primetimo da ova formula nije interesantna za praktičnu primenu s obzirom da uključuje vrednosti podintegralne funkcije u tačkama koje ne pripadaju oblasti integracije.

**7.2.2.** Odrediti koeficijente $A_1$, $A_2$, $A_3$ tako da je formula

1° $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(1-x^2\big)^{-1/2} f(x)\,dx = A_1\,f(-1) + A_2\,f(0) + A_3\,f(1) + R_3(f);$

2° $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx = A_1\,f(0) + A_2\,f(1) + A_3\,f(2) + R_3(f);$

tačna za sve algebarske polinome stepena $k \le 2$. Koliki je algebarski stepen tačnosti u tom slučaju?

**Rešenje.** Stavimo $m_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(1-x^2\big) x^k\,dx$. Primetimo da su momenti neparnog reda jednaki nuli, tj. $m_1 = m_3 = \cdots = 0$. Momente parnog reda odredićemo rekurzivno, startujući od $m_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$.

Kako je

$$m_{2k-2} - m_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{2k-2}\sqrt{1-x^2}\,dx\,,$$

primenom parcijalne integracije na poslednji integral sa $u = \sqrt{1-x^2}$ i $dv = x^{2k-2}\,dx$ $\left(\Rightarrow\ du = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ v = \dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}\right)$ dolazimo do rekurentne relacije

$$m_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,m_{2k-2} \qquad (k \ge 1)\,.$$

Dakle, $m_2 = \dfrac{1}{2}\,m_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $m_4 = \dfrac{3}{4}\,m_2 = \dfrac{3\pi}{8}$, itd.

Iz uslova $R_3(x^k) = 0$ $(k = 0, 1, 2)$, tj. iz sistema jednačina

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi\,, \quad -A_1 + A_3 = 0\,, \quad A_1 + A_3 = \frac{\pi}{2}$$

dobijamo $A_1 = A_3 = \dfrac{\pi}{4}$ i $A_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Kako je $R_3(x^3) = 0$ i

$$R_3(x^4) = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4}(1 + 1) = -\frac{\pi}{8} \neq 0,$$

zaključujemo da dobijena kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \bigl(1 - x^2\bigr)^{-1/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}\Bigl(f(-1) + 2f(0) + f(1)\Bigr) + R_3(f)$$

ima algebarski stepen tačnosti $p = 3$.

Posmatrajmo sada opštiju kvadraturnu formulu

$$\int_{-1}^{1} \bigl(1 - x^2\bigr)^{-1/2} f(x)\, dx = A_1\, f(-t) + A_2\, f(0) + A_3\, f(t) + R_3(f)\,,$$

gde je $0 < t \leq 1$. Iz uslova $R_3(x^k) = 0$ $(k = 0, 1, 2)$, na isti način dobijamo

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi}{4t^2}\,, \qquad A_2 = \frac{\bigl(2t^2 - 1\bigr)\pi}{2t^2}\,.$$

Nadalje imamo $R_3(x^3) = 0$, $R_3(x^4) = \dfrac{\pi}{8}\bigl(3 - 4t^2\bigr)$, $R_3(x^5) = 0$, $R_3(x^6) = \dfrac{\pi}{16}\bigl(5 - 8t^4\bigr)$. Dakle, ako je $t \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \bigl(1 - x^2\bigr)^{-1/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4t^2}\Bigl(f(-t) + 2\bigl(2t^2 - 1\bigr) f(0) + f(t)\Bigr) + R_3(f)$$

ima algebarski stepen tačnosti $p = 3$, dok u slučaju $t = \sqrt{3}/2$ ona postiže maksimalni stepen tačnosti $p = 5$. Tako dobijena kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \bigl(1 - x^2\bigr)^{-1/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + R_3(f)$$

naziva se Gauss–Čebiševljeva formula u tri tačke.

$2^\circ$ Momenti težinske funkcije $x \mapsto e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ su

$$m_k = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^k\, dx = k! \qquad (k = 0, 1, \ldots)\,.$$

Iz sistema jednačina

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1\,, \quad A_2 + 2A_3 = 1\,, \quad A_2 + 4A_3 = 2$$

nalazimo $A_1 = A_3 = \dfrac{1}{2}$, $A_2 = 0$, što znači da odgovarajuća kvadraturna formula degeneriše u dvotačkastu formulu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(f(0) + f(2)\Big) + R_2(f) \tag{1}$$

Kako je $R_2(x^3) = 3! - \dfrac{1}{2}\Big(0^3 + 2^3\Big) = 2 \neq 0$ zaključujemo da formula (1) ima algebarski stepen tačnosti $p = 2$.

**7.2.3.** Odrediti koeficijente $A_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ u kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1\,f(-1) + A_2\,f(1) + A_3\,f'(-1) + A_4\,f'(1) + R(f)\,, \tag{1}$$

tako da ona ima maksimalni mogući algebarski stepen tačnosti. Primenom dobijene formule približno odrediti vrednost integrala

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \tag{2}$$

**Rešenje.** S obzirom da formula ima 4 nepoznata koeficijenta, to ćemo njih odrediti iz uslova da formula bude tačna za sve algebarske polinome stepena $k \leq 3$. Dakle, stavljajući za $f(x)$ redom $1,\ x,\ x^2,\ x^3$, na osnovu (1) dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 \phantom{{}+3A_3+3A_4} &= 2\,,\\
-A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0\,,\\
A_1 + A_2 - 2A_3 + 2A_4 &= 2/3\,,\\
-A_1 + A_2 + 3A_3 + 3A_4 &= 0\,,
\end{aligned}$$

odakle nalazimo $A_1 = A_2 = 1,\ A_3 = -A_4 = \dfrac{1}{3}$.

Sa tako određenim koeficijentima, formula (1) za $f(x) = x^4$ se svodi na

$$\frac{2}{5} = (-1)^4 + 1^4 + \frac{1}{3}\cdot 4\cdot(-1)^3 - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1^3 + R(x^4)\,,$$

odakle nalazimo $R(x^4) = \dfrac{16}{15} \neq 0$. Prema tome, formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-1) + f(1) - \frac{1}{3}\Big(f'(1) - f'(-1)\Big) + R(f) \tag{3}$$

ima algebarski stepen tačnosti je $p = 3$.

Da bismo formulu (3) primenili za izračunavanje vrednosti integrala (2), uvedimo smenu $t = \dfrac{\pi}{4}(x+1)$. Tada imamo

$$I = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi}{4}(x+1)\,dx \cong \frac{\pi}{4}\Big\{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\Big(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\Big)\Big\},$$

tj.

$$I \cong \frac{\pi}{4}\Big(1 + \frac{\pi}{12}\Big) \cong 0.9910\,.$$

Primetimo da je tačna vrednost integrala $I = 1$.

**7.2.4.** Dokazati da za Newton–Cotesove koeficijente važi jednakost $H_k = H_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right])$. Ako je $n$ paran broj dokazati da je algebarski stepen tačnosti odgovarajuće Newton–Cotesove formule $p = n + 1$.

**Rešenje.** Kao što je poznato (videti [2, str. 140])

$$H_k = H_k(n) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!\,n}\binom{n}{k}\int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-k}\,dp \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{1}$$

gde je $p^{(n+1)} = p(p-1)\cdots(p-n)$. Umesto $k$ stavimo $n-k$ u (1). Tada dobijamo

$$H_{n-k} = \frac{(-1)^k}{n!\,n}\binom{n}{n-k}\int_0^n \frac{p^{n+1}}{p-n+k}\,dp\,. \tag{2}$$

Smenom $p := n - p$ $(\Rightarrow\ dp := -dp)$ u integralu koji se pojavljuje na desnoj strani u (2) dobijamo

$$H_{n-k} = \frac{(-1)^k}{n!\,n}\binom{n}{n-k}\int_0^n \frac{(n-p)^{(n+1)}}{-p+k}\,dp\,.$$

Kako je

$$\begin{aligned}(n-p)^{(n+1)} &= (n-p)(n-p-1)\cdots(n-p-n)\\ &= (-p)(-p+1)\cdots(-p+n)\\ &= (-1)^{n+1}\,p^{(n+1)}\end{aligned}$$

i $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$ i $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, na osnovu prethodnog zaključujemo da važi $H_k = H_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, [n/2])$.

Kod kvadraturnih formula sa $n+1$ fiksiranih čvorova

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

koeficijente $A_k$ obično određujemo integracijom interpolacionog polinoma konstruisanog na skupu podataka $(x_k,\ f(x_k))$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ (videti [2, str. 138–139]). Algebarski stepen tačnosti ovako dobijene kvadraturne formule je, najčešće, $p=n$. Na osnovu dokazane jednakosti o simetričnosti Newton–Cotesovih koeficijenata, u slučaju kada je $n$ paran broj možemo zaključiti da je algebarski stepen tačnosti odgovarajuće formule jednak $p=n+1$. Za ovo je dovoljno dokazati da se ostatak

$$R_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k\, f(x_k)\ ,$$

gde je $x_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $n = 2m$ i $H_k$ određeni sa (1), anulira za neki polinom stepena $n+1$. Takav polinom je

$$f(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1},$$

za koji je

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,, \quad f(x_k) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}\left(\frac{k}{m} - 1\right)^{2m+1}.$$

Kako je $f(x_m) = 0$, $f(x_k) = -f(x_{2m-k})$ i $H_k = H_{2n-k}$, zaključujemo da je $R_{n+1}(f) = 0$. Naravno, poslednja jednakost važi za svaki polinom ne višeg stepena od $n+1$, jer se proizvoljni polinom $(n+1)$–og stepena može predstaviti u obliku

$$Q_{n+1}(x) = a_{n+1}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1} + Q_n(x)\,,$$

gde je $Q_n$ polinom ne višeg stepena od $n$. Kako je

$$R_{n+1}(Q_{n+1}) = a_{n+1}\, R_{n+1}\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1}\right) + R_{n+1}(Q_n)$$

i $R_{n+1}(Q_n) = 0$, zaključujemo da je $R_{n+1}(Q_{n+1}) = 0$. Na primer, Simpsonova formula (videti [2, str. 142]),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_3(f)\,,$$

koja se dobija za $n = 2$ ima algebarski stepen tačnosti $p = 3$.

**7.2.5.** Ako $f \in C^4[a,b]$, korišćenjem Peanoove teoreme odrediti ostatak $R_3(f)$ u Simpsonovoj formuli.

**Rešenje.** Ako prepostavimo da $f \in C^{p+1}[a,b]$, gde je $p$ algebarski stepen tačnosti kvadraturne formule, prema Peanoovoj teoremi (videti [2, str. 151–152]) ostatak $R(f)$ se može predstaviti u obliku

$$R(f) = \int_a^b K_p(t)\, f^{(p+1)}(t)\, dt\,, \tag{1}$$

gde je $K_p$ Peanoovo jezgro. U specijalnom slučaju, kada jezgro ne menja znak na $[a,b]$, ostatak $R(f)$ se može predstaviti u obliku

$$R(f) = \frac{R(x^{p+1})}{(p+1)!}\, f^{(p+1)}(\xi) \qquad (a < \xi < b)\,. \tag{2}$$

Kod Simpsonovog pravila imamo $p = 3$ i

$$3!\, K_3(t) = \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6} \cdot \left( (a-t)_+^3 + 4\Big(\frac{a+b}{2} - t\Big)_+^3 + (b-t)_+^3 \right),$$

tj.

$$K_3(t) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)^4}{24} - \dfrac{b-a}{36}\left(4\Big(\dfrac{a+b}{2} - t\Big)^3 + (b-t)^3\right) & \Big(a \le t \le \dfrac{a+b}{2}\Big)\,, \\[2ex] \dfrac{(b-t)^4}{24} - \dfrac{(b-a)(b-t)^3}{36} & \Big(\dfrac{a+b}{2} \le t \le b\Big)\,, \end{cases}$$

odakle sređivanjem dobijamo

$$K_3(t) = \begin{cases} -\dfrac{(b-t)^3}{72}\ (3t - (2a+b)) & \Big(\dfrac{a+b}{2} \le t \le b\Big)\,, \\[2ex] K_3\,(a+b-t) & \Big(a \le t \le \dfrac{a+b}{2}\Big)\,. \end{cases}$$

Primetimo da je $K_3(t) \le 0$ $(t \in [a,b])$, tj. da jezgro ne menja znak na $[a,b]$. Kako je

$$R_3(x^4) = \frac{1}{5}\left(b^5 - a^5\right) - \frac{1}{6}(b-a)\left(a^4 + 4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^4 + b^4\right) = -\frac{(b-a)^5}{120}\,,$$

na osnovu (2) imamo

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \qquad (a < \xi < b)\,.$$

Simpsonova formula za segment $[-1,1]$ ima oblik

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\Big(f(-1)+4f(0)+f(1)\Big) + R_3(f)\,, \tag{3}$$

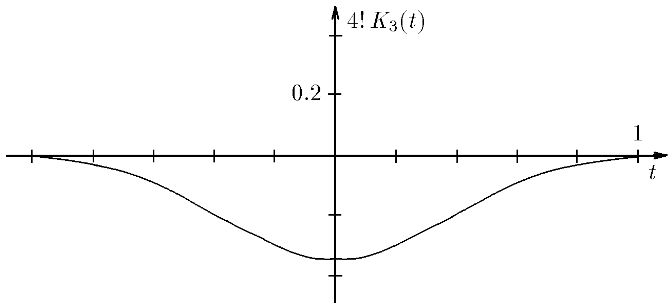
pri čemu je

$$R_3(f) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (-1<\xi<1)\,.$$

Peanovo jezgro $K_3(t)$ je, u ovom slučaju,

$$K_3(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)^3(3t+1)}{72} & (0 \le t \le 1)\,, \\[2ex] \dfrac{(t+1)^3(3t-1)}{72} & (-1 \le t \le 0)\,. \end{cases}$$

Grafik $t \mapsto 4!\,K_3(t)$ prikazan je na slici 1.




Sl. 1.

Za $m = 0,1,2$ mogućno je, takođe, naći odgovarajuće Peanoovo jezgro. Naime,

$$m!\,K_m(t) = L(x-t)_+^m\,,$$

gde je funkcionala $L$ definisana pomoću $Lf = R_3(f)$. Dakle,

$$m!\,K_m(t) = \int_{-1}^{1} (x-t)_+^m\,dx - \frac{1}{3}\left((-1-t)_+^m + 4(0-t)_+^m + (1-t)_+^m\right)\,,$$

tj.

$$m!\,K_m(t) = \frac{(1-t)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{3}\left((-1-t)_+^m + 4(0-t)_+^m + (1-t)_+^m\right)\,.$$

Za $m = 0$ imamo

$$K_0(t) = \begin{cases} 1 - t - \dfrac{1}{3}\Big(4(0-t)^0 + (1-t)^0\Big) & (-1 \le t \le 0)\,, \\ 1 - t - \dfrac{1}{3}\,(1-t)^0 & (0 \le t \le 1)\,, \end{cases}$$

tj.

$$K_0(t) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} - t & (-1 \le t \le 0)\,, \\ \dfrac{2}{3} - t & (0 \le t \le 1)\,. \end{cases}$$

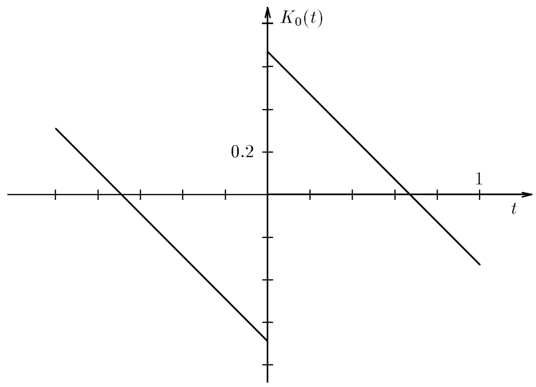
Slično nalazimo

$$K_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}\,(t+1)(3t+1) & (-1 \le t \le 0)\,, \\ \dfrac{1}{6}\,(t-1)(3t-1) & (0 \le t \le 1)\,. \end{cases}$$

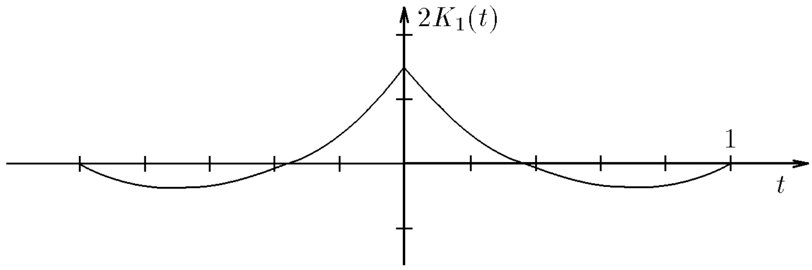
i

$$K_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{6}\,t(t+1)^2 & (-1 \le t \le 0)\,, \\ -\dfrac{1}{6}\,t(t-1)^2 & (0 \le t \le 1)\,. \end{cases}$$

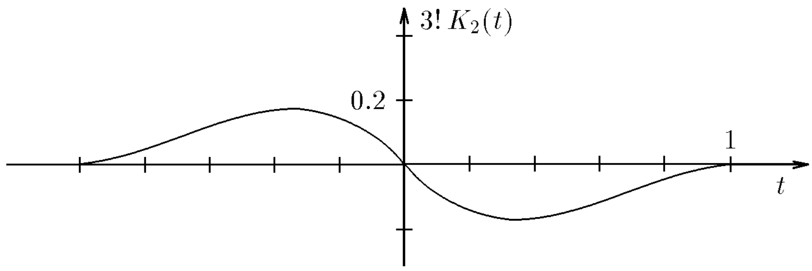
Na slikama 2, 3 i 4 prikazani su grafici funkcija $t \mapsto (m+1)!\,K_m(t)$ za $m = 0, 1, 2$, respektivno.




Sl. 2.




Sl. 3.




Sl. 4.

Ako $f \in C^{m+1}[-1,1]$ ostatak u Simpsonovoj formuli (3) može se izraziti u obliku (videti [2, str. 151])

$$R_3(f) = \int_{-1}^{1} K_m(t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt\,. \tag{4}$$

Ako stavimo

$$e_m = \int_{-1}^{1} |K_m(t)|\, dt\,,$$

tada iz (4) sleduje ocena ostatka

$$|R_3(f)| \le M_{m+1}\, e_m\,, \tag{5}$$

pri čemu je $|f^{(m+1)}(t)| \leq M_{m+1}$ $(t \in [-1,1])$. Kako je

$$e_0 = 2\int_0^1 \left|\frac{2}{3} - t\right| dt = \frac{5}{9},$$

$$e_1 = 2\int_0^1 \frac{1}{6}\,|(t-1)(3t-1)|\, dt = \frac{8}{81},$$

$$e_2 = 2\int_0^1 \frac{1}{6}\,t(t-1)^2\, dt = \frac{1}{36},$$

$$e_3 = 2\int_0^1 \frac{1}{72}\left|(t-1)^3(3t+1)\right| dt = \frac{1}{90},$$

na osnovu (5) važe sledeće ocene ostatka u Simpsonovoj formuli

$$|R_3(f)| \leq \frac{5}{9} \max_{-1\leq t\leq 1} |f'(t)|,$$

$$|R_3(f)| \leq \frac{8}{81} \max_{-1\leq t\leq 1} |f''(t)|,$$

$$|R_3(f)| \leq \frac{1}{36} \max_{-1\leq t\leq 1} |f'''(t)|,$$

$$|R_3(f)| \leq \frac{1}{90} \max_{-1\leq t\leq 1} |f^{(4)}(t)|.$$

**7.2.6.** Primenom Taylorove formule izračunati vrednost funkcije greške $\operatorname{erf}(x)$, definisane pomoću

(1) $$H(x) = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

za $x = 0.5$ i $x = 1.0$, sa greškom manjom od $\varepsilon = 10^{-4}$.

**Rešenje.** Kako je

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \cdots,$$

integracijom dobijamo

(2) $$H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} + \cdots\right).$$

Opšti član ovog alternativnog reda je $u_k = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}$. Kada je $u_{k+1} < \varepsilon = 10^{-4}$, greška u aproksimaciji

$$H(x) \approx S_k(x) = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^k u_k$$

je po modulu manja od $\varepsilon$.

Za $x = 0.5$ iz uslova $u_{k+1} < 10^{-4}$ nalazimo $k = 3$ ($u_4 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{0.5^9}{216} \approx 10^{-5}$). Parcijalne sume reda (2) za $k = 0, 1, 2, 3$ date su u drugoj koloni tabele.

| $k$ | $S_k(0.5)$ | $S_k(1.0)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.5641896 | 1.1283792 |
| 1 | 0.5171738 | 0.7522528 |
| 2 | 0.5207000 | 0.8650907 |
| 3 | 0.5204901 | 0.8382245 |
| 4 | | 0.8434485 |
| 5 | | 0.8425937 |
| 6 | | 0.8427142 |

Odgovarajući rezultati za $x = 1.0$ dati su, takođe, u tabeli, pri čemu je sada $u_7 \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$. Zaokrugljujući dobijene rezultate na četiri decimale dobijamo tražene vrednosti

$$\operatorname{erf}(0.5) \simeq 0.5205 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{erf}(1.0) \simeq 0.8427.$$

Ovakav način izračunavanja integrala (1) postaje neefikasan kada $x$ raste, jer je za dobijanje rezultata sa određenom tačnošću potrebno sabrati veći broj članova razvoja (2). Takođe, broj članova raste ako želimo rezultat sa većom tačnošću.

**7.2.7.** Tabelirati funkciju greške $H(x) = \operatorname{erf}(x)$ za $x = 0\ (0.1)\ 4$ sa šest decimala.

**Rešenje.** Postupak za izračunavanje vrednosti funkcije, koji smo dali u prethodnom zadatku nije efikasan. Zato ćemo ovde koristiti jedan drugačiji metod, koji je efikasniji od prethodnog. Pođimo od Taylorovog razvoja

$$H(x+h) = H(x) + hH'(x) + \cdots + \frac{h}{n!}\,H^{(n)}(x) + R\,, \tag{1}$$

gde je

$$R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,H^{(n+1)}(\xi) \qquad (\xi = x + \theta h\,,\ 0 < \theta < 1)\ .$$

Izvodi se mogu sukcesivno izračunavati pomoću

$$H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}\,, \quad H''(x) = -2xH'(x)\,, \quad H'''(x) = -2xH''(x) - 2H'(x)\,,$$

tj.

$$H^{(k)}(x) = -2x\, H^{(k-1)}(x) - 2(k-2)\, H^{(k-2)}(x)\,. \tag{2}$$

Pretpostavimo da nam je za dato $x$ poznata vrednost $H(x)$. Definišimo nizove $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ pomoću

$$\begin{aligned} &a_0 = H(x)\,, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,,\\ &a_k = -2x\, a_{k-1} - 2(k-2)\, a_{k-2} \qquad (k = 2, \dots, n)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

$$b_0 = 1\,, \quad b_k = \frac{h}{k}\, b_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)\,. \tag{4}$$

Tada, s obzirom na (1) i (2), imamo

$$H(x+h) \cong P_n + N_n\,,$$

gde su $P_n$ i $N_n$ sledeće sume (sa parnim i neparnim indeksima, respektivno):

$$P_n = a_0 b_0 + a_2 b_2 + \cdots \qquad \text{i} \qquad N_n = a_1 b_1 + a_3 b_3 + \cdots\,.$$

Stavljajući u (1) $h := -h$, vidimo da je

$$H(x-h) \cong P_n - N_n\,.$$

Ova razlika nam koristi za proveru vrednosti u tački $x-h$, koja je ranije izračunata.

Startujući sa $x = 0$, $H(0) = 0$ i uzimajući $n = 6$, izloženim postupkom nalazimo redom

$$\begin{aligned} &a_0 = 0\,, \quad a_1 = 1.12837917\,, \quad a_2 = 0\,, \quad a_3 = -2.25675833\,,\\ &a_4 = 0\,, \quad a_5 = 13.5405500\,, \quad a_6 = 0\,;\\ &b_k = \frac{(0.1)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, \dots, 6)\,;\\ &P_6 = a_0 b_0 + a_2 b_2 + a_4 b_4 + a_6 b_6 = 0\,;\\ &N_6 = a_1 b_1 + a_3 b_3 + a_5 b_5 = 0.112462919\,;\\ &H(0.1) \cong P_6 + N_6 = 0.112462919\,. \end{aligned}$$

Primetimo da je $H(-0.1) = -H(0.1) \cong P_6 - N_6$.

Povećajmo sada $x = 0$ za $h = 0.1$ i ponovimo postupak. Tada dobijamo:

$$a_0 = H(0.1) = 0.112462919\,,$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-0.1} = 1.11715161\,,$$

$$a_2 = -0.2\, a_1 = -0.223430321\,,$$

$$a_3 = -0.2\, a_2 - 2a_1 = -2.18961715\,,$$

$$a_4 = -0.2\, a_3 - 4\, a_2 = 1.33164472\,,$$

$$a_5 = -0.2\, a_4 - 6\, a_3 = 12.87137395\,,$$

$$a_6 = -0.2\, a_5 - 8\, a_4 = -13.2274325\,;$$

$$P_6 = 0.111351297\,, \qquad N_6 = 0.111351297\,;$$

$$H(0.2) \cong P_6 + N_6 = 0.222702594\,.$$

Primetimo da je $H(0) = P_6 - N_6 = 0$.

Dobijene vrednosti $H(k)$ zaokrugljene na šest decimala date su u tabeli za $x = 0\,(0.1)\,0.6$ i $x = 1\,(0.5)\,4$.

| $x$ | $H(x)$ | $x$ | $H(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0. | 1.0 | 0.842701 |
| 0.1 | 0.112463 | 1.5 | 0.966105 |
| 0.2 | 0.222703 | 2.0 | 0.995322 |
| 0.3 | 0.328627 | 2.5 | 0.999593 |
| 0.4 | 0.428392 | 3.0 | 0.999978 |
| 0.5 | 0.520500 | 3.5 | 0.999999 |
| 0.6 | 0.603856 | 4.0 | 1.000000 |

**7.2.8.** U priloženoj tabeli date su vrednosti funkcije $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$, u ekvidistantnim tačkama $x_k = 0.1\,k$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$, zaokrugljene na sedam decimala. Na osnovu tih podataka, približno izračunati

$$H(1) = \operatorname{erf}(1) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

primenom

1° uopštene trapezne formule;

2° uopštene Simpsonove formule.

U oba slučaja oceniti grešku.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.1283792 | 0.6 | 0.7872434 |
| 0.1 | 1.1171516 | 0.7 | 0.6912749 |
| 0.2 | 1.0841328 | 0.8 | 0.5949858 |
| 0.3 | 1.0312609 | 0.9 | 0.5019686 |
| 0.4 | 0.9615413 | 1.0 | 0.4151075 |
| 0.5 | 0.8787826 | | |

**Rešenje.** Ovde imamo $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$, $(a,b) = (0,1)$, $h = \dfrac{1}{10}$. Stavimo $f_k = f(x_k)$ $(k = 0,1,2,\ldots,10)$.

1° Po uopštenoj trapeznoj formuli imamo

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\, f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_9 + \frac{1}{2}\, f_{10}\right) + R(f)\,,$$

gde je (videti [2, str. 147])

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\, f''(\xi) = -\frac{1}{1200} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(4\xi^2 - 2\right) e^{-\xi^2}$$

i $0 < \xi < 1$. S obzirom da je

$$|R(f)| \le |R(f)|_{\xi=0} = \frac{1}{300\sqrt{\pi}} < 2 \cdot 10^{-3}\,, \tag{1}$$

vrednost $f_k$ dovoljno je uzeti na četiri decimale, imajući pri tome na umu da greške zaokrugljivanja neće uticati na tačnost izračunavanja. Tako imamo

$$\begin{aligned} H(1) \cong \frac{1}{10}\biggl(&\frac{1}{2} \cdot 1.1284 + 1.1172 + 1.0841 + 1.0313 \\ &+ 0.9615 + 0.8788 + 0.7872 + 0.6913 \\ &+ 0.5950 + 0.5020 + \frac{1}{2} \cdot 0.4151\biggr)\,, \end{aligned}$$

tj. $H(1) \cong 0.842015$. Zaokrugljujući dobijeni rezultat na tri decimale (red veličine ostatka(1)) dobijamo $H(1) \cong 0.842$.

$2^\circ$ Ovde je $n = \dfrac{b-a}{2h} = 5$. Po uopštenoj Simpsonovoj formuli (videti [2, str. 147–148]) imamo

$$H(1) \cong \frac{1}{30}\Big\{f_0 + 4(f_1+f_3+f_5+f_7+f_9) + 2(f_2+f_4+f_6+f_8) + f_{10}\Big\},$$

pri čemu je greška jednaka

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880\,n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{10^{-6}}{1.8}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 4\big(4\xi^4 - 12\xi^2 + 3\big)e^{-\xi^2}\,,$$

gde je $0 < \xi < 1$. Primetimo da je

$$|R(f)| \le |R(f)|_{\xi=0} < 8\cdot 10^{-6}\,.$$

Kako je

$$f_1+f_3+f_5+f_7+f_9 = 4.2204386 \quad \text{i} \quad f_2+f_4+f_6+f_8 = 3.4279053,$$

imamo

$$H(1) \cong \frac{1}{30}\big\{1.1283792 + 4\cdot 4.2204386 + 2\cdot 3.4279053 + 0.4151076\big\} \cong 0.8427017\,,$$

što zaokrugljivanjem na šet decimala daje $H(1) \cong 0.842702$.

Primetimo da je tačnost uopštene Simpsonove formule znatno veća od tačnosti koju daje uopštena trapezna formula.

**7.2.9.** Izračunati

$$\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx,$$

primenjujući kompozitnu trapeznu i Simpsonovu formulu, sa greškom $\varepsilon = 10^{-2}$. Koristiti Rungeovu ocenu.

**Rešenje.** Tabelirajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ na intervalu $[0,4]$ u 13 tačaka i izračunajmo vrednost datog integrala za $n = 6$ i $n = 12$ i procenimo grešku.

Koristeći kompozitnu (uopštenu) trapeznu formulu dobijamo

$$T_6 = \frac{h}{2}\Big[f_0 + 2(f_2+f_4+f_6+f_8+f_{10}) + f_{12}\Big] = 6.02606 \quad (h = 2/3),$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{h}{2}\Big[f_0 + 2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8+f_9+f_{10}+f_{11}) + f_{12}\Big] \\ &= 6.05761 \quad (h = 1/3). \end{aligned}$$

Pri ovome, Rungeova ocena greške se može dati u obliku

$$R_T = \frac{T_{12} - T_6}{3} = 0.01052,$$

a popravljena vrednost integrala $I = T_{12} + R_T = 6.06813$.

| $k$ | $x_k$ | $f_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | 1.00000 |
| 1 | 0.33333 | 1.25593 |
| 2 | 0.66667 | 1.34777 |
| 3 | 1.00000 | 1.41421 |
| 4 | 1.33333 | 1.46789 |
| 5 | 1.66667 | 1.51360 |
| 6 | 2.00000 | 1.55377 |
| 7 | 2.33333 | 1.58982 |
| 8 | 2.66667 | 1.62265 |
| 9 | 3.00000 | 1.65289 |
| 10 | 3.33333 | 1.68099 |
| 11 | 3.66667 | 1.70729 |
| 12 | 4.00000 | 1.73205 |

Koristeći kompozitnu (uopštenu) Simpsonovu formulu dobijamo

$$S_6 = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4(f_2 + f_6 + f_{10}) + 2(f_4 + f_8) + f_{12}\Big] = 6.05406 \quad (h = 2/3),$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10}) + f_{12}\Big] \\ &= 6.06813 \quad (h = 1/3), \end{aligned}$$

pri čemu je Rungeova ocena greške

$$R_S = \frac{S_{12} - S_6}{15} = 0.00094,$$

a popravljena vrednost integrala $I = S_{12} + R_S = 6.06907$. Dakle, $I = 6.07$ pretstavlja približnu vrednost integrala, sa tačnošću reda veličine $\varepsilon = 10^{-2}$.

**Primedba.** Tačna vrednost integrala je $I = 6.07590$. Da bismo popravili rezultat trebalo bi smanjiti korak.

**7.2.10.** Korišćenjem Simpsonovog pravila 3/8 konstruisati odgovarajuću uopštenu formulu.

**Rešenje.** Simpsonovo pravilo 3/8 ima oblik (videti [2, str. 143])

$$
(1) \qquad \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\big(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\big) - \frac{3h^5}{80}\,f^{(4)}(\xi_1)\,,
$$

gde je $x_0 < \xi_1 < x_3$, $f_k = f(x_k)$, $h = (x_3 - x_0)/3$. U cilju dobijanja uopštene kvadraturne formule za segment $[a,b]$ izvršimo podelu ovog segmenta na $3n$ podsegmenata, tako da je $h = (b-a)/(3n)$, $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \dots, 3n)$. Primenom formule (1) na svaki od podsegmenata $[x_0, x_3]$, $[x_3, x_6], \dots, [x_{3n-3}, x_{3n}]$ dobijamo

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\sum_{i=1}^{n}\big(f_{3i-3} + 3f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + f_{3i}\big) + R(f)\,,
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\Big\{ & f_0 + 3\big[(f_1 + f_2) + (f_4 + f_5) + \cdots + (f_{3n-2} + f_{3n-1})\big] \\
& + 2\,(f_3 + f_6 + \cdots + f_{3n-3}) + f_{3n}\Big\} + R(f)\,.
\end{aligned}
$$

Ako je $f \in C^4[a,b]$, ostatak možemo oceniti na sledeći način:

$$
R(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{3h^5}{80}\,f^{(4)}(\xi_i)\right) = -\frac{3h^5}{80}\,n\,f^{(4)}(\xi)
$$

ili

$$
R(f) = -\frac{(b-a)h^4}{80}\,f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480\,n^4}\,f^{(4)}(\xi)\,,
$$

gde je $a < \xi < b$.

Na osnovu prethodnog vidimo da je ova formula znatno komplikovanija od uopštene Simpsonove formule, a da nije značajno tačnija od nje, zbog čega se uglavnom ne koristi.

**7.2.11.** Kako se kvadraturna formula

$$
(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k\,f(x_k)
$$

može primeniti na izračunavanje vrednosti integrala

$$
(2) \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - bt - c}\,g(t)\,dt \qquad (a > 0)\,?
$$

**Rešenje.** Kako je

$$at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

uvođenjem smene $\sqrt{a}\left(t + \dfrac{b}{2a}\right) = x$, integral (2) se svodi na

$$I = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} g\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}\right) dx\,,$$

gde smo stavili $A = \exp\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)/\sqrt{a}$. Sada, primenom formule (1) dobijamo

$$I \cong A\sum_{k=1}^{n} A_k\, g\left(\frac{x_k}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}\right).$$

**7.2.12.** Odrediti kvadraturnu formulu interpolacionog tipa

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k\, f(x_k) + R_{n+1}(f)\,, \tag{1}$$

gde su čvorovi $x_k$ ekstremalne tačke Čebiševljenog polinoma $T_n(x)$ na $[-1, 1]$ $(T_n(x_k) = \pm 1)$.

**Rešenje.** Iz uslova $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \pm 1$ nalazimo $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Definišimo polinom $\omega$ stepena $n + 1$ pomoću

$$\omega(x) = \big(x^2 - 1\big)S_{n-1}(x)\,, \tag{2}$$

gde je $S_{n-1}$ Čebiševljev polinom druge vrste.

Kao što je poznato, reprezentacija ovih polinoma na $[-1, 1]$ je moguća u obliku

$$S_m(x) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\,, \qquad x = \cos\theta\,. \tag{3}$$

Stavimo, dalje, $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Primetimo da su nule polinoma $S_{n-1}(x)$, upravo tačke $x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, tako da polinom $\omega(x)$ ima nule koje su čvorovi kvadraturne formule (1).

Težinski koeficijenti $A_k$ interpolacione kvadrature (1) mogu se izraziti u obliku (videti [2, str. 138])

$$(4) \qquad A_k = \frac{1}{\omega'(x)} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{x - x_k}\, dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Nije teško pokazati da je

$$(5) \qquad \omega(x) = T_{n+1}(x) - x\, T_n(x)\,,$$

gde su $T_k$ Čebiševljevi polinomi prve vrste. Takođe,

$$\omega'(x) = 2x\, S_{n-1}(x) + \big(x^2 - 1\big) S'_{n-1}(x)\,,$$

što se može predstaviti i u obliku

$$\omega'(x) = n\, S_n(x) - (n-1)\, x\, S_{n-1}(x)\,,$$

pri čemu smo koristili sledeće relacije

$$\begin{aligned}
&S_{m+1}(x) = 2x\, S_m(x) - S_{m-1}(x)\,,\\
&\big(1 - x^2\big) S'_m(x) = (m+1)\, S_{m-1}(x) - m\, x\, S_m(x)\,,\\
&\big(1 - x^2\big) S_m(x) = x\, T_{m+1}(x) - T_{m+2}(x)\,,\\
&T_m(x) = S_m(x) - x\, S_{m-1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Kako su $S_m(1) = (-1)^m\, S_m(-1) = m + 1$ i

$$S_n(x_k) = \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} = \cos k\pi = (-1)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,,$$

na osnovu prethodnog zaključujemo da je

$$(6) \qquad \omega'(1) = (-1)^n\, \omega'(-1) = 2n$$

i

$$(7) \qquad \omega'(x_k) = (-1)^k\, n \qquad (k = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Odredimo, najpre, koeficijent $A_0$. Na osnovu (2), (4), (6) imamo

$$A_0 = \frac{1}{2n} \int_{-1}^{1} \frac{\big(x^2 - 1\big) S_{n-1}(x)}{x - 1}\, dx = \frac{1}{2n} \int_{-1}^{1} (x+1)\, S_{n-1}(x)\, dx\,.$$

Korišćenjem (3) nalazimo

$$A_0 = \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} (\cos\theta + 1) \sin n\theta \, d\theta = \frac{2n^2 - (1 - (-1)^n)}{2n^2\,(n^2 - 1)} \,. \tag{8}$$

Isti rezultat dobijamo i za koeficijent $A_n$. Naime, lako je pokazati da je $A_k = A_{n-k}$.

Da bismo odredili $A_k$ $(k = 1, \dots [n/2])$, pođimo od Christoffel–Darbouxovog identiteta za Čebiševljeve polinome prve vrste (videti za opšti slučaj [1, str. 103])

$$\sum_{m=0}^{n}{}' T_m(x)\, T_m(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{n+1}(x)\, T_n(t) - T_{n+1}(t)\, T_n(x)}{x - t} \,, \tag{9}$$

gde $\sum'$ označava da se početni član u sumi (za $m = 0$) uzima sa faktorom $1/2$.

Ako u (9) stavimo $t = x_k = \cos(k\pi/n)$, dobijamo

$$\frac{T_{n+1}(x) - x_k\, T_n(x)}{x - x_k} = 2\,(-1)^k \sum_{m=0}^{n}{}' T_m(x_k)\, T_m(x) \tag{10}$$

jer je $T_n(x_k) = (-1)^k$ i $T_{n+1}(x_k) = x_k(-1)^k$. Sada, na osnovu (5) i (10), zaključujemo da je

$$\frac{\omega(x)}{x - x_k} = 2\,(-1)^k \sum_{m=0}^{n}{}' T_m(x_k)\, T_m(x) - T_n(x)$$

odakle, s obzirom na (4) i (7), nalazimo

$$A_k = \frac{1}{n} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{n}{}' T_m(x_k)\, b_m - (-1)^k\, b_n \right\} ,$$

gde smo stavili

$$b_m = \int_{-1}^{1} T_m(x)\, dx \,.$$

Primetimo da je za neparne indekse ovaj integral jednak nuli, tj. $b_{2m-1} = 0$. Za parne indekse imamo

$$b_{2m} = \frac{2}{1 - 4m^2} \,.$$

Na dalje, $T_{2m}(x_k) = \cos(2m\pi k/n)$. Prema tome,

$$A_k = \frac{4}{n} \sum_{m=0}^{n}{}' \frac{1}{1 - 4m^2} \cos\frac{2m\pi k}{n} - \frac{(-1)^k}{n}\, b_n \quad (k = 1, \dots, [n/2]) \,. \tag{11}$$

Posebno je interesantan je slučaj kada je $n$ paran broj. Tada, na osnovu (8) i (11), dobijamo

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
&A_0 = A_n = \frac{1}{n^2-1} \\
&A_k = A_{n-k} = \frac{4}{n} \sum_{m=0}^{n}{}'' \frac{1}{1-4m^2} \cos\frac{2m\pi k}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n/2)\,,
\end{aligned}
$$

gde $\sum''$ označava da se prvi ($m = 0$) i poslednji ($m = n$) član sume uzimaju sa faktorom 1/2.

*Literatura:*

C. W. Cleanshaw, A. R. Curtis: *A method for integration on an automatic computer.* Numer. Math. **2**(1960), 197–205.

**7.2.13.** Odrediti Peanoovo jezgro za kvadraturnu formulu (1) iz prethodnog zadatka, uzimajući $n = 4$.

**Rešenje.** Na osnovu (1) i (12) za $n = 4$, iz prethodnog zadatka dobijamo kvadraturnu formulu

$$
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{15}\,(f(-1)+f(1)) + \frac{8}{15}\left(f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{4}{5}\,f(0) + R_5(f)\,,
$$

koja ima algebarski stepen tačnosti $p = 5$. Za Peanoovo jezgro (videti [2, str. 152]) dobijamo

$$
5!K_5(t) = \frac{(1-t)^6}{6} - \frac{1}{15}\left\{8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)_+^5 + 12\,(0-t)_+^5 + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)_+^5 + (1-t)_+^5\right\},
$$

odakle je

$$
120K_5(t) = \begin{cases}
\dfrac{(1-t)^6}{6} - \dfrac{8}{15}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - t\right)^5 - \dfrac{1}{15}\,(1-t)^5 & \left(0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \\[2ex]
\dfrac{(1-t)^6}{6} - \dfrac{1}{15}\,(1-t)^5 & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 1\right)
\end{cases}
$$

i

$$
K_5(t) = K_5(-t) \qquad (-1 \le t \le 0)\,.
$$

Primetimo da jezgro $K_5(t)$ menja znak na segmentu $[-1, 1]$ jer je $K_5(0) > 0$ i $K_5(\sqrt{2}/2) < 0$. Zbog toga ocena ostatka ove kvadraturne formule pomoću formule

(2) iz zadatka 7.2.5, nije moguća, već je mogućuća u obliku koji daje Peanoova teorema

$$R_5(f) = \int_{-1}^{1} K_5(t)\, f^{(6)}(t)\, dt\,,$$

pri čemu pretpostavljamo da $f \in C^6[-1, 1]$.

Ako je šesti izvod funkcije $f$ ograničen na $[-1, 1]$, tj. ako je $\left| f^{(6)}(t) \right| \le M_6$ $(t \in [-1, 1])$, tada na osnovu prethodnog važi sledeća ocena ostatka:

$$|R_5(f)| \le M_6\, e_5\,,$$

gde je

$$e_5 = \int_{-1}^{1} |K_5(t)|\; dt\,.$$

**7.2.14.** Obim elipse $\left\{(x, y)\ :\ \dfrac{x^2}{c^2} + y^2 = 1\,,\ c > 0\right\}$ dat je formulom

$$L(c) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - c^2)\sin^2 t}\, dt\,.$$

Za $c = 1.2$, približno odrediti $L(c)$ Rombergovom integracijom, koristeći prva tri koraka. Pri računanju koristiti približne vrednosti podintegralne funkcije $f_k = f(x_k)$ u tačkama $x_k = k\pi/8$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$:

$$f_0 = 1.00000, \quad f_1 = 1.03172, \quad f_2 = 1.10453, \quad f_3 = 1.17284, \quad f_4 = 1.20000.$$

**Rešenje.** Uopštena trapezna formula ima oblik

$$(1) \qquad I = \int_a^b f(x)\, dx \cong T\,(f, h_n) = h_n \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n\right),$$

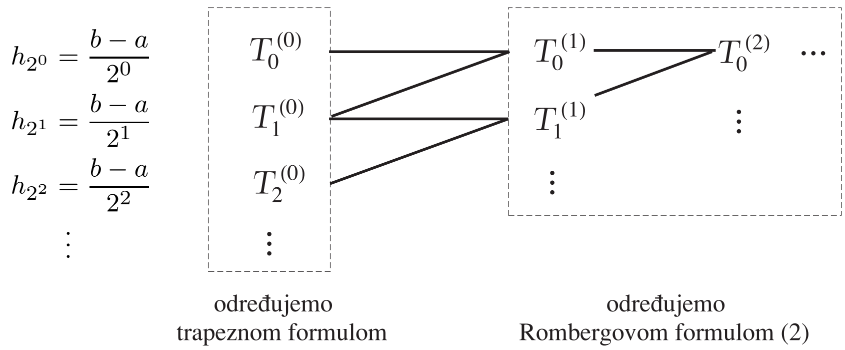
gde je $h_n = (b - a)/n,\ x_k = a + k\, h_n,\ f_k = f(x_k)$.

Ako za $h_n$ uzmemo redom $h_n = h_{2^k} = (b - a)/2^k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ i primenjujemo formulu (1) dobićemo vrednosti $T_k^{(0)} = T\,(f, h_{2^k})$, na osnovu kojih možemo formirati iterativni proces

$$(2) \qquad T_k^{(m)} = \frac{4^m\, T_{k+1}^{(m-1)} - T_k^{(m-1)}}{4^m - 1} \qquad (m = 1, 2, \dots)$$

za određivanje vrednosti integrala $I$.

Prethodna procedura se može prikazati tzv. T–tabelom:




Nizovi po kolonama i vrstama u T–tabeli konvergiraju ka vrednosti integrala (1). Kod praktične primene Rombergove integracije, iterativni proces (2) se najčešće prekida kada je $\left| T_0^{(m)} - T_0^{(m-1)} \right| \le \varepsilon$, gde je $\varepsilon$ unapred data dozvoljena greška i tada se uzima $I \cong T_0^{(m)}$.

Dakle, ako uvedemo oznaku $A_k = T_k^{(0)}/h_{2^k}$ $(k = 0, 1, 2)$, primenom trapezne formule na izračunavanje integrala datog zadatkom za $h = \pi/2^{k+1}$ imamo redom

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}(f_0 + f_4) = 1.1\,, & T_0^{(0)} &= h_{2^0}\,A_0 \cong 1.727876\,,\\
A_1 &= A_0 + f_2 = 2.20453\,, & T_1^{(0)} &= h_{2^1}\,A_1 \cong 1.731434\,,\\
A_2 &= A_1 + f_1 + f_3 = 4.40909\,, & T_2^{(0)} &= h_{2^2}\,A_2 \cong 1.731446\,.
\end{aligned}
$$

Primenom formule (2) na ove rezultate dobijamo T–tabelu

| | | |
|---|---|---|
| 1.727876 | 1.73262 | 1.731372 |
| 1.731434 | 1.73145 | |
| 1.731446 | | |

pa je $L(1.2) \cong 4 \cdot 1.731372 \cong 6.92549\,.$

Rombergova integracija se može jednostavno programski realizovati. Ovde dajemo potprogram realizovan na FORTRAN jeziku u D–aritmetici:

```
subroutine romberg(dg,gg,fun,eps,vint,kb)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension t(15)
common c
```

```
      kb=0
      h=gg-dg
      a=(fun(dg)+fun(gg))/2
      pom=h*a
      do 50 k=1,15
      x=dg+h/2
   10 a=a+fun(x)
      x=x+h
      if(x.lt.gg) go to 10
      t(k)=h/2*a
      b=1
      if(k.eq.1) go to 20
      do 15 m=1,k-1
      i=k-m
      b=4*b
   15 t(i)=(b*t(i+1)-t(i))/(b-1)
   20 b=4*b
      vint=(b*t(1)-pom)/(b-1)
      if(dabs(vint-pom).le.eps) return
      pom=vint
   50 h=h/2
      kb=1
      end
```

Lista u potprogramu ima sledeće značenje:

- `dg` – donja granica integrala;
- `gg` – gornja granica integrala;
- `fun` – ime funkcijskog potprograma kojim se definiše podintegralna funkcija;
- `eps` – zahtevana tačnost izračunavanja;
- `vint` – vrednost integrala sa tačnošću `eps`, ukoliko je `kb = 0`;
- `kb` – kontrolni broj (`kb = 0` integral je korektno izračunat; `kb = 1` tačnost izračunavanja integrala nije postignuta sa 15 predviđenih koraka, tj. sa brojem podsegmenata $2^{15}$).

U naredbi `common` navedena je zajednička promenljiva kojom se definiše parametar u podintegralnoj funkciji. U konkretnom slučaju, podintegralnu funkciju za eliptički integral $L(c)$ definišemo na sledeći način:

```
function fun(x)
implicit real*8 (a-h,o-z)
common c
fun=4*dsqrt(1-(1-c*c)*dsin(x)**2)
return
end
```

Uuzimajući $\varepsilon = 10^{-15}$ i $c = 0.4(0.2)1.4$ dobijamo sledeće rezultate:

| c | L(c) |
|---|---|
| 0.4 | 4.60262251913297 |
| 0.6 | 5.10539977267963 |
| 0.8 | 5.67233357779490 |
| 1.0 | 6.28318530717959 |
| 1.2 | 6.92579119580968 |
| 1.4 | 7.59227378695277 |

Kao kontrola dobijenih rezultata može poslužiti vrednost

$$L(1) = 2\pi = 6.2831853071795864769\ldots\ .$$

**7.2.15.** Metodom neodređenih koeficijenata odrediti parametre Filonove kvadraturne formule

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx \cong A_1 f(0) + A_2 f(\pi) + A_3 f(2\pi)\,.$$

**Rešenje.** Uzimajući za $f(x)$ redom $1,\ x,\ x^2$ dobijamo sistem jednačina

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0\,,\quad A_2\,\pi + A_3\,2\pi = -2\pi\,,\quad A_2\,\pi^2 + A_3\,4\pi^2 = -4\pi^2\,,$$

odakle sleduje $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -1$. Dakle, imamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin x\,dx \cong f(0) - f(2\pi)\,.$$

**Primedba.** Filon je razradio i opštije kvadraturne formule za integraciju tzv. brzooscilatornih funkcija. Tako na primer, dobio je formulu

$$\int_a^b f(x)\sin kx\,dx \cong h\big[A\,(f(a)\,\cos ka - f(b)\,\cos kb) + B\cdot S + C\cdot T\big],$$

gde je $2nh = b - a$ i

$$A = \frac{1}{kh} + \frac{\sin 2kh}{2k^2h^2} - \frac{2\sin^2 kh}{k^3h^3}\,, \qquad B = \frac{1+\cos^2 kh}{k^2h^2} - \frac{\sin 2kh}{k^3h^3}\,,$$

$$C = \frac{4\sin kh}{k^3h^3} - \frac{4\cos kh}{k^2h^2}\,,$$

$$S = -f(a)\,\sin ka - f(b)\,\sin kb + 2\sum_{i=0}^{n} f(a+2ih)\,\sin(ka+2ikh)\,,$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)h\right)\,\sin\left(ka+(2i-1)kh\right)\,.$$

Odgovarajuća greška se može predstaviti u obliku

$$R = \frac{h^3(b-a)}{12}\left(1 - \frac{1}{16\,\cos\dfrac{kh}{4}}\right)\sin\frac{kh}{2}\cdot f^{(4)}(\xi)\,,$$

gde je $(a < \xi < b)$.

**7.2.16.** Odrediti koeficijente $A,\ B,\ C$ i ostatak u kvadraturnoj formuli

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = A\left(f(a) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right) + Bf'(a) + Cf'(b) + R(f)\,.$$

Primenom dobijene formule približno izračunati integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ i proceniti grešku.

**Rešenje.** Iz uslova $R(f) = 0$ za $f(x) = 1,\ x,\ x^2$ dobijamo sistem jednačina

$$3A = b - a\,, \qquad A\Big(a + \frac{a+b}{2} + b\Big) + B + C = \frac{1}{2}\big(b^2 - a^2\big)\,,$$

$$A\left(a^2 + \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 + b^2\right) + 2\,(Ba + Cb) = \frac{1}{3}\big(b^3 - a^3\big)\,,$$

odakle sleduje

$$A = \frac{1}{3}\,(b-a)\,, \qquad B = -C = \frac{1}{24}\,(b-a)^2\,.$$

S obzirom da je

$$R(x^3) = \frac{1}{4}\big(b^4 - a^4\big) - \frac{1}{3}(b-a)\left(a^3 + \Big(\frac{a+b}{2}\Big) + b^3\right) + \frac{1}{8}(b-a)^2\big(b^2 - a^2\big) = 0$$

i

$$R(x^4) = \frac{1}{5}\big(b^5 - a^5\big) - \frac{1}{3}(b-a)\left(a^4 + \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^4 + b^4\right)$$
$$+ \frac{1}{6}(b-a)^2\big(b^3 - a^3\big) = \frac{(b-a)^5}{80}$$

zaključujemo da formula (1) ima algebarski stepen tačnosti $p = 3$. Pod pretpostavkom da $f \in C^4[a,b]$, ostatak se može predstaviti u obliku

$$R(f) = \frac{R(x^4)}{4!}\, f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{1920}\, f^{(4)}(\xi) \qquad (a < \xi < b)\,.$$

Za $a = 0$ i $b = 1$, formula (1) postaje

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(f(0) + f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f(1)\right) - \frac{1}{24}\Big(f'(1) - f'(0)\Big) + \frac{1}{1920}\, f^{(4)}(\xi)\,,$$

gde je $\xi \in (0,1)$. Primenom ove formule na dati integral dobijamo

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx \cong \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \cong 1.21909\,.$$

Primetimo da je tačna vrednost integrala

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\Big(2\sqrt{2} - 1\Big) \cong 1.2189514\,,$$

što znači da je apsolutna greška manja od $1.4 \cdot 10^{-4}$.

S obzirom da je

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}\,(1+x)^{-7/2} \quad \text{i} \quad \big|\, f^{(4)}(x)\,\big| \le \frac{15}{16} \quad (x \in [0,1]),$$

na osnovu ostatka kvadraturne formule, dobijamo ocenu greške

$$|R(f)| \le \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{1920} < 4.9 \cdot 10^{-4}\,.$$

Očigledno, stvarna greška je manja od ove granice.

**7.2.17.** Sukcesivnom zamenom $(a,b) = \big(\frac{i-1}{m},\ \frac{i}{m}\big)$ $(i = 1, \dots, m)$ u kvadraturnoj formuli (1) iz prethodnog zadatka, naći kompozitnu formulu za integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ i oceniti grešku.

**Rešenje.** Na osnovu prethodnog zadatka, imamo $A = \dfrac{1}{3m}$, $B = -C = \dfrac{1}{24m^2}$, pa je

$$\int_{(i-1)/m}^{i/m} f(x)\,dx \cong \frac{1}{3m}\left(f\left(\frac{i-1}{m}\right) + f\left(\frac{2i-1}{2m}\right) + f\left(\frac{i}{m}\right)\right) - \frac{1}{24m^2}\left(f'\left(\frac{i}{m}\right) - f'\left(\frac{i-1}{m}\right)\right),$$

pri čemu se ostatak može oceniti pomoću

$$(1) \qquad R_i(f) = \frac{1}{1920\,m^5}\, f^{(4)}(\xi_i) \qquad \left(\frac{i-1}{m} < \xi_i < \frac{i}{m}\right).$$

Odgovarajuću kompozitnu formulu za segment $[0,1]$ dobijamo na sledeći način:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{m} \int_{(i-1)/m}^{i/m} f(x)\,dx \\ &\cong \frac{1}{3m}\left(2\sum_{i=0}^{m}{}'' f\left(\frac{i}{m}\right) + \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{2i-1}{2m}\right)\right) - \frac{1}{24\,m^2}\Big(f'(1) - f'(0)\Big),\end{aligned}$$

gde $\sum''$ označava da se prvi i poslednji član sume uzimaju sa faktorom $1/2$. Ako je $f \in C^4[0,1]$, korišćenjem (1), ostatak u dobijenoj kompozitnoj formuli se može predstaviti u obliku

$$R(f) = \frac{1}{1920\,m^4}\, f^{(4)}(\xi) \qquad (0 < \xi < 1).$$

**7.2.18.** Odrediti koeficijente $A$, $B$, $C$ i oceniti ostatak u kvadraturnoj formuli

$$(1) \quad \int_0^{2h} x^a f(x)\,dx = (2h)^{a+1}\left(A\,f_0 + B\,\Delta f_0 + C\,\Delta^2 f_0\right) + R(f) \quad (a > -1),$$

gde je $f_k = f(kh)$ $(k = 0,1,2)$, tako da je formula tačna za polinome što je moguće višeg stepena.

**Rešenje.** Koeficijente $A$, $B$, $C$ odredićemo iz uslova $R(x^k) = 0$ $(k = 0,1,2)$. Tako imamo:

Za $k = 0$, $f_0 = f_1 = f_2 = 1$, $\Delta f_0 = \Delta^2 f_0 = 0$, pa iz $R(1) = 0$ dobijamo $A = 1/(a+1)$.

Za $k = 1,\ f_0 = 0,\ f_1 = h,\ f_2 = 2h,\ \Delta f_0 = h,\ \Delta^2 f_0 = 0$, pa iz $R(x) = 0$ sleduje $B = 2/(a+2)$.

Za $k = 2$ imamo $f_0 = 0,\ f_1 = h^2,\ f_2 = 4h^2,\ \Delta f_0 = h^2,\ \Delta^2 f_0 = 2h^2$. Iz $R(x^2) = 0$ dobijamo $B + 2C = 4/(a+3)$, odakle je

$$C = \frac{a+1}{(a+2)\,(a+3)}\,.$$

Sa ovako određenim koeficijentima imamo

$$R(x^3) = \int_0^{2h} x^{a+3}\,dx - (2h)^{a+1}\left(\frac{2}{a+2}\,h^3 + \frac{a+1}{(a+2)\,(a+3)}\cdot 6h^3\right),$$

tj.

$$R(x^3) = -\frac{a\,(2h)^{a+4}}{2(a+2)(a+3)(a+4)}\,.$$

Dakle, ako je $a \neq 0$ zaključujemo da je algebarski stepen tačnosti formule (1) jednak $p = 2$. Za $a = 0$ formula (1) se svodi na Simpsonovu formulu, što znači da je tada algebarski stepen tačnosti $p = 3$.

Do koeficijenata $A,\ B,\ C$ mogli smo doći i integracijom prvog Newtonovog interpolacionog polinoma za funkciju $f$ konstruisanog u čvorovima $0,\ h,\ 2h$:

$$P_2(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}\,x + \frac{\Delta^2 f_0}{2h}\,x(x-h)\,.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int_0^{2h} x^a f(x)\,dx &\cong \int_0^{2h} x^a\,P_2(x)\,dx\\ &= (2h)^{a+1}\left\{\frac{1}{a+1}\,f_0 + \frac{2}{a+2}\,\Delta f_0 + \frac{a+1}{(a+2)(a+3)}\,\Delta^2 f_0\right\}.\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da $f \in C^3[0,2h]$, tada se ostatak interpolacione formule može izraziti u obliku

$$r_2(f;x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x(x-h)(x-2h)\,, \tag{2}$$

gde je $\xi$ takvo da pripada $(0,2h)$. Ostatak kvadraturne formule (1) možemo dobiti integracijom ostatka (2), tj.

$$R(f) = \int_0^{2h} x^a\,r_2(f;x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^{2h} x^{a+1}(x-h)(x-2h)\,f'''(\xi)\,dx\,, \tag{3}$$

gde $\xi \in (0, 2h)$ i zavisi od $x$. Primetimo da ostatak (3) ne možemo predstaviti u obliku

$$R(f) = C\, f'''(\eta) \qquad (0 < \eta < 2h)\,,$$

jer se na integral koji se pojavljuje u (3) ne može primeniti teorema o srednjoj vrednosti integrala. Razlog je što funkcija $x \mapsto x^{a+1}(x-h)(x-2h)$ menja znak na $(0, 2h)$. Međutim, važi

$$|R(f)| \le \frac{1}{6}\, C \cdot M_3\,,$$

gde je $M_3 = \max\limits_{0 \le x \le 2h} \left|f'''(x)\right|$ i $C = \displaystyle\int_0^{2h} x^{a+1}(2h - x)\,|x - h|\,dx.$

**7.2.19.** Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije formirati skup $\{Q_0,\ Q_1,\ Q_2\}$ ortogonalnih polinoma na $(-1, 1)$ sa težinom $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, a zatim odrediti parametre i ostatak u kvadraturnoj formuli Gaussovog tipa

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} f(x)\,dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,. \tag{1}$$

**Rešenje.** Kako je

$$C_n = \int_{-1}^{1} x^n \sqrt{1 - x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & (n = 2k+1), \\ \dfrac{2(n-1)!!}{(n+2)!!}\, C_0 & (n = 2k)\,, \end{cases}$$

i $C_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, nalazimo $C_2 = \dfrac{\pi}{8}$ i $C_4 = \dfrac{\pi}{16}$.

Primenom Gram–Schmidtovog postupka ortogonalizacije jednostavno dobijamo

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1\,, \\ Q_1(x) &= x - \frac{C_1}{C_0}\, Q_0(x) = x\,, \\ Q_2(x) &= x^2 - \frac{C_2}{C_0}\, Q_0(x) - \frac{C_3}{C_2}\, Q_1(x) = x^2 - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Čvorove u Gaussovoj kvadraturi (1) nalazimo kao nule polinoma $Q_2$. Dakle,

$$-x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Nadalje, imamo

$$A_1 = A_2 = \frac{\|Q_1\|^2}{Q_1(x_1)\, Q_2'(x_1)} = \frac{\|Q_1\|^2}{2\, x_1^2} = \frac{\dfrac{\pi}{8}}{2 \cdot \dfrac{1}{4}} = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$R_2(f) = \frac{\|Q_2\|^2}{4!}\, f^{(4)}(\xi) = \frac{\pi}{768}\, f^{(4)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1)\,.$$

Dakle, formula (1) ima oblik

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) + \frac{\pi}{768}\, f^{(4)}(\xi)\,.$$

**7.2.20.** Odrediti parametre i ostatak u sledećim kvadraturnim formulama Gaussovog tipa:

1° $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, \sin^2 \frac{\pi x}{2}\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,,$

2° $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1+x)\, f(x)\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,,$

3° $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, f(x)\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,,$

4° $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, \cos x\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,,$

5° $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, f(x)\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f)\,.$

Primenom treće formule približno izračunati

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx\,.$$

**Rešenje.** 1° Ortogonalni polinomi sa težinom $p(x) = \sin^2 \dfrac{\pi x}{2}$ na $(-1,1)$ su: $Q_0(x) = 1,\ Q_1(x) = x,\ Q_2(x) = x^2 - \Big(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi^2}\Big)$, s obzirom da je

$$(1, Q_0) = \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi x}{2}\, dx = 1, \quad \big(x^2, Q_0\big) = \int_{-1}^{1} x^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2}\, dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\,.$$

Čvorovi kvadrature su

$$-x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}} \cong 0.732104\,,$$

a koeficijenti

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Kako je

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \bigl(x^2 - x_2^2\bigr) \sin^2 \frac{\pi x}{2}\, dx = \frac{4}{45} + \frac{8}{3\pi^2} - \frac{28}{\pi^4}\,,$$

ostatak u klasi funkcija $C^4[-1,1]$ ima oblik

$$R_2(f) = \frac{\|Q_2\|^2}{4!\cdot 1} f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{45} + \frac{2}{3\pi^2} - \frac{7}{\pi^4}\right) f^{(4)}(\xi)\,,$$

tj.

$$R_2(f) \cong 2.98\cdot 10^{-3} f^{(4)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1)\,.$$

2° U ovom slučaju imamo $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x - \frac{1}{3}$, $Q_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$, pa je $x_1 = \frac{1}{5}\bigl(1-\sqrt{6}\bigr)$, $x_2 = \frac{1}{5}\bigl(1+\sqrt{6}\bigr)$, $A_1 = \frac{1}{9}\bigl(9-\sqrt{6}\bigr)$, $A_2 = \frac{1}{9}\bigl(9+\sqrt{6}\bigr)$ i $R_2(f) = \frac{1}{225} f^{(4)}(\xi)$ $(1- < \xi < 1)$.

3° Neka je $C_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$. Tada je $C_0 = \frac{\pi}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}(4-\pi)$, $C_4 = \frac{1}{6}(3\pi - 8)$, $C_1 = C_3 = 0$, pa su

$$Q_0(x) = 1\,, \quad Q_1(x) = x\,, \quad Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{\pi}(4-\pi)\,,$$

odakle nalazimo

$$-\,x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \cong 0.522723\,,$$

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4} \cong 0.785398\,,$$

$$R_2(f) = \frac{8\pi - 24}{72\pi} f^{(4)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1)\,.$$

Primenom ove formule na integral $I$ dobijamo

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\arctan|x|}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2\arctan x \cong 0.3783\,.$$

Inače, tačna vrednost integrala je

$$I = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8} = 0.392699\ldots,$$

što znači da je dobijena približna vrednost sa apsolutnom greškom manjom od $1.5 \cdot 10^{-2}$.

4° Ovde dobijamo

$$-x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2} \cong 0.68367\,, \quad A_1 = A_2 = 1$$

i

$$R_2(f) = \frac{10 - \pi^2}{6}\, f^{(4)}(\xi) \cong 2.17 \cdot 10^{-2}\, f^{(4)}(\xi)\,,$$

gde je $\xi \in \Big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\Big)$.

5° Ovde je $p(x) = e^{-x}/\sqrt{x}$. Odredimo, najpre, momente težinske funkcije, tj. integrale

$$C_n = \int_0^{+\infty} x^n\, p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1/2}\, e^{-x}\, dx = \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\,,$$

gde je $\Gamma$ gama funkcija. S obzirom na rekurentnu relaciju $\Gamma(1+z) = z\,\Gamma(z)$, zaključujemo da je $C_n = \dfrac{2n-1}{2}\, C_{n-1}$. Prema tome, redom nalazimo

$$C_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad C_1 = \frac{1}{2}\, C_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,, \quad C_2 = \frac{3}{2}\, C_1 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,,$$

$$C_3 = \frac{5}{2}\, C_2 = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\,, \quad C_4 = \frac{7}{2}\, C_3 = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}\,,$$

pa je

$$Q_0(x) = 1\,, \quad Q_1(x) = x - \frac{C_1}{C_0} = x - \frac{1}{2}\,,$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{C_2}{C_0} - \frac{C_3 - \frac{1}{2} C_2}{C_2 - C_1 + \frac{1}{4} C_0}\Big(x - \frac{1}{2}\Big) = x^2 - 3x + \frac{3}{4}\,.$$

Iz uslova $Q_2(x) = 0$ nalazimo čvorove kvadrature $x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\big(3 \pm \sqrt{6}\big)$. Odgovarajući težinski koeficijenti su $A_{1,2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{6}\big(3 \mp \sqrt{6}\big)$.

Kako je

$$\|Q_2\|^2 = C_4 - 6\,C_3 + \frac{21}{2}\,C_2 - \frac{9}{2}\,C_1 + \frac{9}{16}\,C_0 = \frac{3}{2}\,\sqrt{\pi}$$

jednostavno nalazimo ostatak u kvadraturnoj formuli, u klasi $C^4[0, +\infty]$

$$\text{(1)} \qquad R_2(f) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{4!}\,f^{(4)}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{16}\,f^{(4)}(\xi) \qquad (0 < \xi < +\infty)\,.$$

Primetimo da u poslednjem slučaju imamo Gauss–Laguerreovu kvadraturnu formulu (videti [2, str. 175]) za $n = 2$. Kako je $p(x) = x^{-1/2}e^{-x}$, zaključujemo da su $x_k$ $(k = 1, 2)$ nule generalisanog Laguerreovog polinoma $L_2^{-1/2}(x)$. Na osnovu Rodriguesove formule (videti [4, str. 52])

$$L_n^s(x) = x^{-s}\,e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\bigl(x^{n+s}\,e^{-x}\bigr)\,,$$

za $n = 2$ i $s = -1/2$, nalazimo $L^{-1/2}(x) = x^2 - 3x + 3/4$, što se poklapa sa polinomom $Q_2(x)$.

Na osnovu formule ([2, str. 175])

$$A_k = \frac{n!\,\Gamma(n+s+1)}{x_k\left(\dfrac{d}{dx}\,L_n^s(x_k)\right)} \qquad (k = 1, \dots, n)$$

imamo

$$A_1 = \frac{2\,\Gamma\left(3 - \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}\,\bigl(3+\sqrt{6}\bigr)\,\bigl(3+\sqrt{6}-3\bigr)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\bigl(3-\sqrt{6}\bigr)$$

i slično

$$A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\bigl(3+\sqrt{6}\bigr)\,.$$

Opšti oblik za ostatak je

$$R_n(f) = \frac{n!\,\Gamma(n+s+1)}{(2n)!}\,f^{(2n)}(\xi) \qquad (0 < \xi < +\infty).$$

Za $n = 2$ i $s = -1/2$ dobijamo ostatak dat pomoću (1).

**7.2.21.** Odrediti $A_k$, $x_k$ $(k = 1, 2, 3)$ i ostatak $R_3(f)$ u Gauss-Hermiteovoj formuli

$$\text{(1)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} A_k\,f(x_k) + R_3(f) \qquad (a > 0)\,.$$

**Rešenje.** Smenom $ax = t$ integral koji se pojavljuje u (1) se svodi na

$$I = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f\left(\frac{t}{a}\right) dt .$$

Primenom Gauss–Hermiteove formule (videti [2, str. 176]) na ovaj integral dobijamo

$$I = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} B_k f\left(\frac{t_k}{a}\right) + \frac{1}{a} R_n(g) , \tag{2}$$

gde je $g(t) = f(t/a)$, $t_k$ nule Hermiteovog polinoma $H_n(t)$ i $B_k$ težinski koeficijenti određeni sa

$$B_k = \frac{2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi}}{n H_{n-1}(x_k)^2} \qquad (k = 1, \ldots , n) .$$

Ostatak je

$$R_n(g) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} g^{(2n)}(\xi) \qquad (-\infty < \xi < +\infty) .$$

S obzirom da je $H_0(t) = 1,\ H_1(t) = 2t,\ H_2(t) = 4t^2 - 2,\ H_3(t) = 8t^3 - 12t, \ldots,$ na osnovu prethodnog, za $n = 3$, dobijamo

$$t_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} , \quad t_2 = 0 , \quad t_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} ,$$

$$B_1 = B_3 = \frac{2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\pi}}{3H_2 \left(\sqrt{6}/2\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} ,$$

$$B_2 = \frac{2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\pi}}{3H_2(0)^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} .$$

Upoređivanjem formula (1) i (2) nalazimo

$$-x_1 = x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2a} , \quad x_2 = 0 ,$$

$$A_1 = A_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{6a} , \quad A_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3a} .$$

Najzad, u klasi funkcija $C^6(-\infty, +\infty)$, za ostatak formule (1) važi

$$R_3(f) = \frac{1}{a} \cdot \frac{3! \sqrt{\pi}}{2^3 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{a^6} f^{(6)}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{960\, a^7} f^{(6)}(\xi) ,$$

gde $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

**7.2.22.** Koristeći se Gauss–Čebiševljevom kvadraturnom formulom dokazati formulu

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{ax}}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(1+2\cosh\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)+R\,, \tag{1}$$

gde je $R$ ostatak koji treba odrediti.

**Rešenje.** Gauss–Čebiševljeva kvadraturna formula (videti [2, str. 174])

$$\int_{1}^{1} \frac{f(x)}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\,dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)+R_n(f)\,, \tag{2}$$

gde su čvorovi $x_k$ nule Čebiševljevog polinoma $T_n(x)$, tj. $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k=1,2,\dots,n$, i ostatak

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!}\,f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1<\xi<1)\,, \tag{3}$$

za $n=3$ se svode na

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{23040}\,f^{(4)}(\xi). \tag{4}$$

Ako u (4) stavimo $f(x)=e^{ax}$ dobijamo formulu (1), gde je

$$R = \frac{\pi a^4}{23040}\,e^{a\xi} \qquad (-1<\xi<1)\,.$$

Na primer, za $a=1$, $R \le 3.71\cdot 10^{-4}$. Dakle,

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x}}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\,dx \cong 3.97732+R\,.$$

**7.2.23.** Sa tačnošću $10^{-4}$ odrediti vrednost integrala

$$\text{(a)}\quad \int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,; \qquad \text{(b)}\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\,.$$

**Rešenje.** U oba slučaja primenjujemo Gauss–Čebiševljevu kvadraturnu formulu (videti formulu (2) iz prethodnog zadatka).

a) S obzirom da je funkcija $f(x) = \cos 2x$ parna, imamo

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + \frac{1}{2} R_n(f)\,, \tag{1}$$

gde su $x_k = \cos \dfrac{(2k-1)\,\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, a $R_n(f)$ dato pomoću formule (3) iz prethodnog zadatka.

Kako je $f^{(2n)}(x) = (-1)^n\, 2^{2n} \cos 2x$ imamo

$$\frac{1}{2} R_n(f) = (-1)^n \frac{\pi}{(2n)!} \cos 2\xi \qquad (-1 < \xi < 1)\,.$$

Primetimo da je uslov

$$\Big| \frac{1}{2} R_n(f) \Big| \le \frac{\pi}{(2n)!} < 10^{-4}$$

ispunjen za $n = 4$ jer je $\dfrac{\pi}{8!} \approx 7.8 \cdot 10^{-5}$. Prema tome primenićemo Gauss–Čebiševljevu formulu za $n = 4$.

S obzirom da su

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8}\,, \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{8}\,, \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{8} = -x_2\,, \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{8} = -x_1\,,$$

imamo

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \frac{\pi}{8}\left(2f\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right) \approx 0.3516\,.$$

Numeričke vrednosti čvorova su

$$x_1 \cong 0.92387953\,, \qquad x_2 \cong 0.38268343\,.$$

Primenom formule (1) za $n = 2\,(1)\,8$ dobijamo rezultate koji su dati u sledećoj tabeli:

| $n$ | Približna vrednost integrala (a) | Približna vrednost integrala (b) |
|---|---|---|
| 2 | 0.2449557829 | 1.282549830 |
| 3 | 0.3554643616 | 1.315205717 |
| 4 | 0.3516171344 | 1.310404152 |
| 5 | 0.3516876037 | 1.311125324 |
| 6 | 0.3516868074 | 1.311013592 |
| 7 | 0.3516868135 | 1.311031197 |
| 8 | 0.3516868135 | 1.311028388 |
| 9 | | 1.311028840 |

b) S obzirom da je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

u ovom slučaju uzećemo $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$. Primenom formule (1) za $n = 2\,(1)\,9$ dobijamo rezultate koji su, takođe, dati u prethodnoj tabeli. Tačna vrednost integrala sa šest decimala je 1.311028.

**7.2.24.** Za izračunavanje vrednosti integrala

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\, f(x)\, dx$$

izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu stepena tačnosti pet.

**Rešenje.** Odredimo najpre momente

$$C_k = \int_0^2 x^k \sqrt{x(2-x)}\, dx \qquad (k = 0, 1, ...)\,.$$

Smenom $x = 2t$ dobijamo

$$C_k = 2^{k+2} \int_0^1 t^{k+1/2} (1-t)^{1/2}\, dt = 2^{k+2}\, \mathrm{B}\Big(k + \frac{3}{2},\, \frac{3}{2}\Big)\,,$$

tj.

$$C_k = \frac{(2k+1)!!\,\pi}{(k+2)!} \qquad (k = 0, 1, \dots)\,.$$

Dakle, $C_0 = \dfrac{\pi}{2}$ i $C_k = \dfrac{2k+1}{k+2}\, C_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Da bismo dobili formulu algebarskog stepena tačnosti 5 potrebno je uzeti $n = 3$ čvora $(2n-1=5)$. Prema tome, treba konstruisati formulu

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\, f(x)\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + A_3\, f(x_3) + R_3(f)\,.$$

Čvorovi $x_k$ $(k = 1, 2, 3)$ su nule polinoma $Q_3(x)$, ortogonalnog na $(0, 2)$ sa težinskom funkcijom $p(x) = \sqrt{x(2-x)}$. Konstruišimo ovaj niz polinoma. Imamo redom

$$k = 0 \,:\; Q_0(x) = 1\,;$$

$$k = 1 \,:\; (Q_0, Q_0) = C_0 = \frac{\pi}{2}\,, \quad (x, Q_0) = C_1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$Q_1(x) = x - \frac{(x, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0(x) = x - 1\,;$$

$$k = 2 \,:\; (x^2, Q_0) = C_2 = \frac{5\pi}{8}\,, \quad (x^2, Q_1) = C_3 - C_2 = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$(Q_1, Q_1) = C_2 - 2C_1 + C_0 = \frac{\pi}{8}\,,$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{(x, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0(x) - \frac{(x^2, Q_1)}{(Q_1, Q_1)}\, Q_1(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{4}\,;$$

$$k = 3 \,:\; \left(x^3, Q_0\right) = C_3 = \frac{7\pi}{8}\,, \quad (x^3, Q_1) = C_4 - C_3 = \frac{7\pi}{16}\,,$$

$$(x^3, Q_2) = C_5 - 2C_4 + \frac{3}{4}\, C_3 = \frac{3\pi}{32}\,,$$

$$(Q_2, Q_2) = C_4 - 4C_3 + \frac{11}{2}\, C_2 - 3C_1 + \frac{9}{16}\, C_0 = \frac{\pi}{32}\,,$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{(x^3, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}\, Q_0(x) - \frac{(x^3, Q_1)}{(Q_1, Q_1)}\, Q_1(x) - \frac{(x^3, Q_2)}{(Q_2, Q_2)}\, Q_2(x)$$

$$= x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}\, x - \frac{1}{2}\,.$$

S obzirom da je

$$Q_3(x) = (x-1)\Big(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\Big)\,,$$

jednostavno određujemo čvorove

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Težinski koeficijenti su tada

$$A_1 = A_3 = \frac{\|Q_2\|^2}{Q_2(x_1)\, Q_3'(x_1)} = \frac{\pi/32}{(1/4)\cdot 1} = \frac{\pi}{8}\,,$$

$$A_2 = \frac{\|Q_2\|^2}{Q_2(x_2)\, Q_3'(x_2)} = \frac{\pi/32}{(-1/2)(-1/4)} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Dakle, kvadraturna formula ima oblik

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{8}\left(f\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2f(1) + f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + R_3(f)\,.$$

Kako je

$$\|Q_3\|^2 = R_3(x^6) = \frac{\pi}{128}\,,$$

ostatak se u klasi funkcija $C^6[0,2]$ može predstaviti u obliku

$$R_3(f) = \frac{\pi}{92160}\, f^{(6)}(\xi) \qquad (0 < \xi < 2)\,.$$

**7.2.25.** Odrediti koeficijente kvadraturne formule

$$\int_{-1}^{1} |x|(1-x^2) f(x)\, dx = A_1 f(-a) + A_2 f(0) + A_3 f(a) + R(f),$$

gde je $a \in (0,1)$ dati parametar, tako da je ona tačna bar za sve polinome stepena ne većeg od dva. Na osnovu dobijenog rezultata odrediti parametar $a$, tako da formula ima maksimalno mogući algebarski stepen tačnosti. Za taj slučaj odrediti ostatak $R(f)$ u formuli. Dobijenu formulu primeniti na izračunavanje integrala

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

**Rešenje.** Zamenom $f(x) = 1, x, x^2$ u datu kvadraturnu formulu dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{1}{2}, \\ -aA_1 + aA_3 &= 0, \\ a^2 A_1 + a^2 A_3 &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

za određivanje koeficijenata $A_i,\ i = 1, 2, 3$, tako da je kvadraturna formula tačna za sve polinome stepena ne većeg od dva. Rešavanjem sistema dobijamo

$$A_1 = \frac{1}{12a^2}, \quad A_2 = \frac{3a^2 - 1}{6a^2}, \quad A_3 = \frac{1}{12a^2}.$$

Dakle, kvadraturna formula je oblika

$$\int_{-1}^{1} |x|(1-x^2) f(x)\, dx = \frac{1}{12a^2} f(-a) + \frac{3a^2-1}{6a^2} f(0) + \frac{1}{12a^2} f(a) + R(f).$$

Zamenom $f(x) = x^3$, iz poslednje kvadraturne formule dobijamo $R(x^3) = 0$, što znači da je ova formula tačna i za polinome stepena tri. Za $f(x) = x^4$ na isti način dobijamo da je $R(x^4) = (1-2a^2)/12$, odakle je $R(x^4) = 0$ za $a = \pm\sqrt{2}/2$, tj. $a = \sqrt{2}/2$ jer $a \in (0,1)$. Kvadraturna formula najzad dobija oblik

$$\int_{-1}^{1} |x|(1-x^2)f(x)\,dx = \frac{1}{6}f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{6}f(0) + \frac{1}{6}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + R(f),$$

i ona je tačna za sve polinome stepena ne većeg od 4. Jednostavnom proverom za $f(x) = x^5$ zaključujemo da je $R(x^5) = 0$. Na isti način za $f(x) = x^6$ nalazimo da $R(x^6) = 1/120 \neq 0$, pa poslednja kvadraturna formula ima algebarski stepen tačnosti 5, dakle ona je Gaussovog tipa.

Ostatak dobijene Gaussove kvadraturne formule je

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}R(x^6) = \frac{1}{120\cdot 6!}f^{(6)}(\xi) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{86400}, \quad \xi \in (-1,1).$$

Najzad, primenjući dobijenu formulu, izračunajmo integral

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Kako je

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,(1-x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

potrebno je uzeti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Tada dobijamo

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \cong \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\sqrt{2}/2\right)^2}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}/2\right)^2}}\right] \cong 0.319.$$

**7.2.26.** Odrediti parametre Gaussove kvadraturne formule

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

i ostatak $R_3(f)$, ako je težinska funkcija $p(x) = |x|(1 - x^2)$.

**Rešenje.** Neka je $\{Q_k\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz ortogonalnih polinoma na $(-1, 1)$ sa težinskom funkcijom $x \mapsto p(x) = |x|(1 - x^2)$ i neka je $a_k$ koeficijent uz najviši stepen u polinomu $Q_n$, tj. $Q_k(x) = a_k x^k +$ članovi nižeg stepena. Za Gaussovu kvadraturnu formulu sa $n$ čvorova važi:

a) $x_k$, $k = 1, \dots, n$, su nule ortogonalnog polinoma $Q_n$,

b) $A_k = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \dfrac{\|Q_{n-1}\|^2}{Q_{n-1}(x_k)Q_n'(x_k)}$, $k = 1, \dots, n$,

c) $R_n(f) = \dfrac{\|Q_n\|^2}{(2n)!\, a_n^2} f^{(2n)}(\xi)$, $\xi \in (a, b)$.

Na osnovu navedenih formula, za naš zadatak, imamo:

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x\Big(x^2 - \frac{1}{2}\Big) \implies x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x \implies a_3 = 1; \quad Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \implies a_2 = 1,$$

$$\|Q_2\|^2 = (Q_2, Q_2) = \frac{1}{36}, \quad Q_3'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2},$$

$$A_1 = \frac{\|Q_2\|^2}{Q_2(x_1)Q_3'(x_1)} = \frac{1}{6},\ A_2 = \frac{\|Q_2\|^2}{Q_2(x_2)Q_3'(x_2)} = \frac{1}{6},\ A_3 = \frac{\|Q_2\|^2}{Q_2(x_3)Q_3'(x_3)} = \frac{1}{6},$$

$$\|Q_3\|^2 = (Q_3, Q_3) = \frac{1}{120} \implies R_3(f) = \frac{\|Q_3\|^2}{6!} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Dakle, tražena kvadraturna formula je

$$\int_{-1}^{1} |x|(1-x^2)f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + 1.1574\cdot 10^{-5} f^{(6)}(\xi),$$

gde $\xi \in (-1, 1)$.

**Primedba.** Napraviti poređenje ovog zadatka sa prethodnim.

**7.2.27.** Odrediti parametre i ostatak u Gaussovoj kvadraturnoj formuli

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f),$$

a zatim približno izračunati

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{x}}\, dx.$$

**Rešenje.** Polazeći od prirodnog bazisa $\{1, x, x^2\}$, Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije nalazimo polinome ortogonalne na $(0,1)$, sa težinom $x \mapsto p(x) = 1/\sqrt{x(1-x)}$,

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad Q_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}.$$

Pri rešavanju odgovarajućih integrala koristili smo formule

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\Gamma(1+z) = z\,\Gamma(z), \quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

Čvorovi $x_k,\ k = 1, 2$, su nule ortogonalnog polinoma $Q_2$, tj.

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Kako je

$$a_n = a_{n-1} = 1, \quad Q_2'(x) = 2x - 1, \quad \|Q_1\|^2 = \frac{\pi}{8},$$

to iz formule

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\|Q_{n-1}\|^2}{Q_{n-1}(x_k)Q_n'(x_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

za $n = 2$, nalazimo

$$A_1 = \frac{\|Q_1\|^2}{Q_1(x_1)Q_2'(x_1)} = \frac{\pi}{2}, \quad A_2 = \frac{\|Q_1\|^2}{Q_1(x_2)Q_2'(x_2)} = \frac{\pi}{2}.$$

Kako je $\|Q_2\|^2 = \pi/128$, iz formule

$$R(f) = \frac{\|Q_n\|^2}{(2n)!\, a_n^2} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (a,b),$$

za $n = 2$ dobijamo

$$R(f) = \frac{\pi}{3072} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (0,1).$$

Najzad, s obzirom na jednakost

$$\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x(1-x)}},$$

primenom dobijene kvadraturne formule na $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx &\cong \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2} + \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2}\\ &\cong 0.8184 + 1.5539 = 2.3723.\end{aligned}$$

**7.2.28.** Izvesti formulu za približnu integraciju

$$\text{(1)} \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\,dx \cong \frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=1}^n \sin^2\frac{k\pi}{n+1}\, f\Big(\cos\frac{2k\pi}{n+1}\Big).$$

**Rešenje.** Neka je $g(x) = f(2x^2-1)$. Dokazaćemo najpre jednakost

$$\text{(2)} \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\; f(x)\,dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\; g(x)\,dx.$$

Ako uvedemo smenu $x = 2t-1$ u integral na levoj strani dobijamo:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\; f(x)\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{2-2t}{2t}}\; f(2t-1)\,dt = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}\; f(2t-1)\,dt.$$

Uvođenjem nove smene $t = u^2$, poslednji integral se svodi na

$$\begin{aligned}2\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} f(2t-1)\,dt &= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} f(2u^2-1)u\,du\\ &= 4\int_0^1 \sqrt{1-u^2} f(2u^2-1)\,du = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(2u^2-1)\,du.\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da je

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\,dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(2x^2-1)\,dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\; g(x)\,dx.$$

Izvedimo, sada, Gaussovu kvadraturnu formulu, sa $n$ čvorova za nalaženje integrala

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; g(x)\, dx.$$

Tražena formula je oblika

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; g(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k g(x_k) + R_n(g), \tag{3}$$

gde su $x_k$ nule Čebiševljevog polinoma druge vrste

$$S_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

koji su ortogonalni na segmentu $[-1,1]$ u odnosu na težinsku funkciju $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Iz jednačine $\sin[(n+1)\arccos x] = 0$ određujemo nule polinoma $S_n$, tj. čvorove kvadrature,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Koeficijenti kvadraturne formule se izračunavaju po formuli (videti [2, str. 170–176])

$$A_k = \frac{2(2n+1)\Gamma\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)^2}{(n+1)!\,\Gamma(n+1)} \cdot \frac{C_n C_{n-1}}{S_{n-1}(x_k)S_n'(x_k)},$$

gde je

$$C_n = \frac{(n-1)!\,\Gamma\Big(\dfrac{3}{2}\Big)}{\Gamma\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)} = \frac{(n+1)!\,2^n}{(2n+1)!!},$$

pri čemu smo koristili formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ i

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{3}{2}\Big) = \cdots \\ &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

S obzirom da je

$$C_n C_{n-1} = \frac{(n+1)!2^n}{(2n+1)!!} \cdot \frac{n!\,2^{n-1}}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n-1}\,n!(n+1)!}{(2n+1)((2n-1)!!)^2},$$

imamo

$$A_k = \frac{2(2n+1)\cdot 2^{-2n}((2n-1)!!)^2\pi}{(n+1)!\,n!} \cdot \frac{2^{2n-1}\,n!(n+1)!}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \cdot \frac{1}{S_{n-1}(x_k)S_n'(x_k)},$$

tj.

$$A_k = \frac{\pi}{S_{n-1}(x_k)S'_n(x_k)}. \tag{4}$$

Kako su redom

$$S'_n(x) = \frac{-(n+1)\sqrt{1-x^2}\cdot\cos[(n+1)\arccos x] + x\sin[(n+1)\arccos x]}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\begin{aligned}
S_{n-1}(x_k) &= \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}}\sin[n\arccos x_k] = \frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}\cdot\sin\frac{nk\pi}{n+1} \\
&= \frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}\cdot\sin\frac{(n+1-1)k\pi}{n+1} = \frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}\sin\Big(k\pi - \frac{k\pi}{n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}\Big(\sin k\pi\cos\frac{k\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\cos k\pi\Big) = (-1)^{k+1},
\end{aligned}$$

$$S'_n(x_k) = \frac{-(n+1)\sin\dfrac{k\pi}{n+1}\cos k\pi + \cos\dfrac{k\pi}{n+1}\sin k\pi}{\sin^3\dfrac{k\pi}{n+1}} = \frac{(-1)^{k+1}(n+1)}{\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}},$$

zaključujemo da je

$$S_{n-1}(x_k)S'_n(x_k) = \frac{(-1)^{2k+2}(n+1)}{\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}} = \frac{n+1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}}.$$

Najzad, zamenom u (4), dobijamo

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}\,\sin^2\frac{k\pi}{n+1},$$

tako da tražena Gaussova kvadraturna formula (3) postaje

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,g(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\,g\Big(\cos\frac{k\pi}{n+1}\Big) + R_n(g).$$

Kako je

$$2x_k^2 - 1 = \cos\frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 1,\dots,n,$$

na osnovu (2) zaključujemo da važi

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\, dx = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}\, f\Big(\cos \frac{2k\pi}{n+1}\Big) + \widetilde{R}_n(f),$$

tj. formula (1), sa ostatkom $\widetilde{R}_n(f) = 2R_n(g)$, gde je $g(x) := f(2x^2-1)$.

Izračunajmo još ostatak $R_n(g)$ po formuli (videti [2, str. 171])

$$R_n(g) = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\, n!\, \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(2n)!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)^2}\, g^{(2n)}(\xi),$$

gde je $\xi \in (-1,1)$. Za $\alpha = \beta = 1/2$ prethodni izraz se svodi na

$$\begin{aligned} R_n(g) &= \frac{2^{2n+2}\, n! \Gamma\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)^2 \Gamma(n+2)}{(2n)!(2n+2)\Gamma(2n+2)^2}\, g^{(2n)}(\xi) \\ &= \frac{2^{2n+2}\, n!\, 2^{-2n-2}((2n+1)!!)^2 \pi\, (n+1)!}{2(n+1)(2n)!((2n+1)!)^2}\, g^{(2n)}(\xi) \\ &= \frac{n!\, (n+1)!\, ((2n+1)!!)^2 \pi}{2(n+1)(2n)!\, ((2n)!!)^2((2n+1)!!)^2}\, g^{(2n)}(\xi) \\ &= \frac{n!\, (n+1)!\, \pi}{2(n+1)(2n)!\, 2^{2n}(n!)^2}\, g^{(2n)}(\xi), \end{aligned}$$

tj.

$$R_n(g) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!}\, g^{(2n)}(\xi).$$

Napomenimo da kvadraturna formula (1) nije Gaussovog tipa. Ta formula ima algebarski stepen tačnosti $p = n-1$. Da bismo se u ovo uverili dovoljno je uzeti, na primer, $f(x) = \big((1+x)/2\big)^{m/2}$, gde je $m \in \mathbb{N}_0$. Imajući u vidu ranije uvedenu supstituciju $f(2x^2-1) = g(x)$, sada je $g(x) = x^m$. Kako je $R_n(g) = 0$ za $m \le 2n-1$ (formula (3) je Gaussovog tipa) i $\widetilde{R}_n(f) = 2R_n(g)$, zaključujemo da je $\widetilde{R}_n(x^r) = 0$ samo za $r = 0, 1, \ldots, n-1$, s obzirom da je $r = m/2 \le n-1$. Dakle, $\widetilde{R}_n(x^n) \ne 0$.

**7.2.29.** Za integral iz prethodnog zadatka izvesti kvadraturnu formulu Gaussovog tipa i dati ocenu ostatka. Na numeričkom primeru

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x+x^2-x^3}{1+x}}\, dx$$

uporedititi rezultate dobijene formulom Gaussovom tipa i kvadraturnom formulom iz prethodnog zadataka.

**Rešenje.** S obzirom da se radi o Jacobievoj težinskoj funkciji na $(-1,1)$, sa parametrima $\alpha = -\beta = 1/2$, tj. $p(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$, tročlana rekurentna relacija za monične Jacobieve polinome

$$Q_{k+1}(x) = (x - \beta_k)Q_k(x) - \gamma_k Q_{k-1}(x), \tag{1}$$

gde su (videti [1, Tabela 2.13.1, str. 148])

$$\beta_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+2)}\,, \quad \gamma_k = \frac{4k(k+\alpha)(k+\beta)(k+\alpha+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)^2\big((2k+\alpha+\beta)^2-1\big)}\,,$$

svodi se na

$$Q_{k+1}(x) = xQ_k(x) - \frac{1}{4}\,Q_{k-1}(x), \quad k = 1,2,\dots\,. \tag{2}$$

Prva tri člana moničnog ortogonalnog niza su:

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{1}{2}(2x+1), \quad Q_2(x) = \frac{1}{4}\big(4x^2+2x-1\big).$$

Uvedimo normalizaciju takvu da umesto moničnih polinoma $Q_k(x)$ radimo sa ortogonalnim polinomima $W_k(x) = 2^k Q_k(x)$ $(k = 0,1,\dots)$. Dakle, koeficijent uz najviši stepen u $W_k(x)$ je $a_k = 2^k$, tako da su sada

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x+1, \quad W_2(x) = 4x^2+2x-1.$$

Zamenom $Q_k(x) = 2^{-k}W_k(x)$ u (2) daje rekurentnu relaciju

$$W_{k+1}(x) = 2xW_k(x) - W_{k-1}(x), \quad k = 1,2,\dots\,. \tag{3}$$

Za polinome $W_k(x)$ moguće je naći eksplicitan izraz rešavanjem jednačine (3) kao linearne diferencne jednačine drugog reda, pri fiksiranoj vrednosti za $x$. Njena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$, čiji su koreni $\lambda_{1,2} = x \pm i\sqrt{1-x^2}$. Ako za $-1 \le x \le 1$ stavimo $x = \cos\theta$, imamo

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}.$$

Opšte rešenje jednačine (3) je tada

$$W_k(\cos\theta) = C_1\cos k\theta + C_2\sin k\theta,$$

gde su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne konstante. U konkretnom slučaju one se mogu odrediti iz početnih uslova za $k = 0$ i $k = 1$ $\big(W_0(\cos\theta) = 1,\, W_1(\cos\theta) = 2\cos\theta + 1\big)$.

Dakle, iz uslova

$$1 = C_1, \quad 2\cos\theta + 1 = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta,$$

dobijamo $C_1 = 1$, $C_2 = (1 = \cos\theta)/\sin\theta$, što daje

$$W_k(\cos\theta) = \cos k\theta + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\sin k\theta = \frac{\sin\Big(k+\dfrac{1}{2}\Big)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{4}$$

Kvadrat norme ovih polinoma se jednostavno izračunava

$$\|W_k\|^2 = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, W_k(x)^2\, dx = 2\int_0^{\pi}\sin^2\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\theta\, d\theta = \pi.$$

Na osnovu (4) eksplicitno nalazimo nule $x_k$ $(k = 1, \dots, n)$ polinoma $W_n(x)$. Dakle, iz $\sin\Big(k+\dfrac{1}{2}\Big)\theta = 0$ $(\theta \neq 0)$ dobijamo

$$x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, \dots, n),$$

tako da odgovarajuća Gaussova formula ima oblik

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f\Big(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\Big) + R_n(f).$$

Na osnovu formule ([2, str. 169])

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{\|W_{n-1}\|^2}{W_{n-1}(x_k)W_n'(x_k)} \quad (k = 1, \dots, n),$$

dobijamo težinske koeficijente

$$A_k = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{\pi \cdot 2\sin^2(\theta_k/2)}{2n+1} = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, \dots, n),$$

imajući u vidu da su $x_k = \cos\theta_k$, $\theta_k = 2k\pi/(2n+1)$,

$$W_{n-1}(x_k) = \frac{\sin\Big(n-\dfrac{1}{2}\Big)\theta_k}{\sin\dfrac{\theta_k}{2}} = 2(-1)^{k+1}\cos\frac{\theta_k}{2}\,,$$

$$W_n'(x_k) = \frac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}\left(W_n(x_k) - (2n+1)\frac{\cos\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)\theta_k}{\cos\dfrac{\theta_k}{2}}\right) = \frac{(2n+1)(-1)^{k+1}}{4\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}\cos\dfrac{\theta_k}{2}}.$$

Dakle, tražena kvadraturna formula Gaussovog tipa je

$$(5)\qquad \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)\,dx = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\,f\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\Bigr) + R_n(f),$$

pri čemu se ostatak u klasi funkcija $C^{2n}[-1,1]$ može dati u obliku

$$R_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!2^{2n}}\,f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1<\xi<1).$$

Ako sa $K_n^{(1)}(f)$ označimo kvadraturnu formulu iz prethodnog zadatka, tj.

$$K_n^{(1)}(f) = \frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\,f\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n+1}\Bigr),$$

a sa $K_n^G(f)$ Gaussovu kvadraturnu sumu u (5), lako se uočava da je $K_{2n}^{(1)}(f) = K_n^G(f)$, tj. isti rezultat se dobija i sa formulom iz prethodnog zadatka, ali sa dva puta većim brojem čvorova. Ilustrujmo ovu činjenicu na numeričkom primeru

$$I = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x+x^2-x^3}{1+x}}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\sqrt{1+x^2}\,dx,$$

sa $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, uzimajući u kvadraturnim formulama broj čvorova $n = 5(5)30$.

| $n$ | $K_n^{(1)}(f)$ | $K_n^G(f)$ |
|---|---|---|
| 5 | 3.82256588973303 | 3.82018450430623 |
| 10 | 3.82018450430623 | 3.82019778968144 |
| 15 | 3.82019771538528 | 3.82019778902766 |
| 20 | 3.82019778968144 | 3.82019778902771 |
| 25 | 3.82019778903289 | 3.82019778902771 |
| 30 | 3.82019778902766 | 3.82019778902771 |

**Primedba.** Jacobievi polinomi za $\alpha=-\beta=1/2$, definisani sa (4), u literaturi su poznati kao Čebiševljevi polinomi četvrte vrste. Odgovarajući polinomi ortogonalni u odnosu na težinu $p(x)=(1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}$ $(-\alpha=\beta=1/2)$ nazivaju se Čebiševljevi polinomi treće vrste. I oni se mogu eksplicitno izraziti u obliku

$$V_k(\cos\theta) = \frac{\cos\Bigl(k+\dfrac{1}{2}\Bigr)\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \qquad (k=0,1,\dots).$$

Prva tri člana ortogonalnog niza su

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1, \quad V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1,$$

a njihova tročlana rekurentna relacija je ista kao i kod polinoma $W_k(x)$, tj.

$$V_{k+1}(x) = 2xV_k(x) - V_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Primetimo da važi $W_k(-x) = (-1)^k V_k(x)$.

**7.2.30.** Odrediti parametre kvadraturne formule oblika

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + A_4 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right),$$

tako da ona ima maksimalno mogući algebarski stepen tačnosti.

**Rešenje.** Izjednačavajući levu i desnu stranu u (1), kada se monomi 1, $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^5$ uzimaju redom umesto funkcije $f(x)$, dolazimo do sistema nelinearnih jednačina

$$(2) \qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2, \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 - \dfrac{\sqrt{5}}{5} A_3 + \dfrac{\sqrt{5}}{5} A_4 = 0, \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \dfrac{1}{5} A_3 + \dfrac{1}{5} A_4 = \dfrac{2}{3}, \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 - \dfrac{\sqrt{5}}{25} A_3 + \dfrac{\sqrt{5}}{25} A_4 = 0, \\ A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 + \dfrac{1}{25} A_3 + \dfrac{1}{25} A_4 = \dfrac{2}{5}, \\ A_1 x_1^5 + A_2 x_2^5 - \dfrac{\sqrt{5}}{125} A_3 + \dfrac{\sqrt{5}}{125} A_4 = 0. \end{cases}$$

Da bismo rešili ovaj sistem, uvodimo pomoćnu funkciju $\omega$ pomoću

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - x_1)(x - x_2)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0. \end{aligned}$$

Množenjem prvih pet jednačina sistema (2) redom sa $C_0, C_1, C_2, C_3, 1$ i njihovim sabiranjem dobijamo

$$A_1 \omega(x_1) + A_2 \omega(x_2) + A_3 \omega\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + A_4 \omega\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2C_0 + \frac{2}{3} C_2 + \frac{2}{5}.$$

Primenjujući isti postupak na poslednjih pet jednačina sistema (2) dobijamo

$$A_1x_1\omega(x_1) + A_2x_2\omega(x_2) - A_3\omega\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + A_4\omega\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{5}C_3.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \omega\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) &= \frac{1}{25} - \frac{\sqrt{5}}{25}C_3 + \frac{1}{5}C_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}C_1 + C_0, \\ \omega\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) &= \frac{1}{25} + \frac{\sqrt{5}}{25}C_3 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}C_1 + C_0. \end{aligned}$$

Kako je

$$\omega(x_1) = \omega(x_2) = \omega\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \omega\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0,$$

na osnovu dobijenih rezultata dolazimo do sistema linearnih jednačina

$$\begin{cases} C_0 + \frac{1}{3}C_2 = -\frac{1}{5}, \\ \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{5}C_3 = 0, \\ C_0 - \frac{\sqrt{5}}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2 - \frac{\sqrt{5}}{25} = -\frac{1}{25}, \\ C_0 + \frac{\sqrt{5}}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{\sqrt{5}}{25} = -\frac{1}{25}, \end{cases}$$

čijim rešavanjem nalazimo

$$C_0 = \frac{1}{5}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{6}{5}, \quad C_3 = 0.$$

Sada iz

$$\omega(x) = x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5} = (x-1)(x+1)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

dobijamo $x_1 = -1,\ x_2 = 1$. Zamenom ovako nađenih $x_1$ i $x_2$, sistem jednačina (2) se svodi na sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2, \\ -A_1 + A_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}A_3 + \frac{\sqrt{5}}{5}A_4 = 0, \\ A_1 + A_2 + \frac{1}{5}A_3 + \frac{1}{5}A_4 = \frac{2}{3}, \\ A_1 + A_2 + \frac{1}{25}A_3 + \frac{1}{25}A_4 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Rešavanjem poslednjeg sistema jednačina dobijamo

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{6}, \quad A_3 = A_4 = \frac{5}{6}.$$

**7.2.31.** Odrediti $A$ i $x_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ u kvadraturnoj formuli Čebiševljevog tipa

$$\int_{-1}^{1} |x|^{1/2} f(x)\, dx \cong A(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)).$$

**Rešenje.** Ovde je

$$A = \frac{1}{n}\int_a^b p(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} |x|^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{3},$$

gde je $n$ broj čvorova u formuli. Dalje, određujemo brojeve

$$s_m = \frac{1}{A}\int_a^b p(x) x^m\, dx, \quad m = 1, 2, \ \ldots\ , n.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} |x|^{1/2} x\, dx = 0,\\
s_2 &= \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} |x|^{1/2} x^2\, dx = \frac{2}{A}\int_0^1 \sqrt{x} x^2\, dx = \frac{12}{7},\\
s_3 &= \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} |x|^{1/2} x^3\, dx = 0,\\
s_4 &= \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} |x|^{1/2} x^4\, dx = \frac{2}{A}\int_0^1 \sqrt{x} x^4\, dx = \frac{12}{11}.
\end{aligned}$$

Konstruišemo zatim funkciju

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

gde koeficijente $a_1, a_2, a_3, a_4$ određujemo iz sistema jednačina (videti [2, str. 193])

$$s_m + a_1 s_{m-1} + a_2 s_{m-2} + \ \ldots\ + a_{m-1} s_1 + m a_m = 0, \quad m = 1, 2, \ \ldots\ , n,$$

tj. iz sistema

$$\begin{aligned}
&a_1 = -s_1,\\
&a_1 s_1 + 2a_2 = -s_2,\\
&a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = -s_3,\\
&a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 = -s_4,
\end{aligned}$$

koji se svodi na

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = -\frac{12}{7}, \quad 3a_3 = 0, \quad \frac{12}{7}a_2 + 4a_4 = -\frac{12}{11}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6}{7}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{51}{539},$$

odnosno

$$\omega(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{51}{539}.$$

Najzad, smenom $t = x^2$ dobijamo da je $\omega(t) = 0$ za $t_{1,2} = 3/7 \pm (4/7)\sqrt{3/11}$, pa su čvorovi tražene kvadrature Čebiševljevog tipa:

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{3}{11}}}, \qquad x_{3,4} = \mp\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{3}{11}}}.$$

**7.2.31.** Zamenjujući funkciju $f$ odgovarajućim interpolacionim polinomom, odrediti koeficijente $A_1, A_2, A_3, A_4$ i ostatak $R(f)$ u kvadraturnoj formuli

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-1) + A_4 f'(1) + R(f).$$

Primenom dobijene formule približno izračunati integral $I = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$ i proceniti grešku.

**Rešenje.** Koristeći tabelu

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(-1)$ | $f(1)$ |
| $f'(x)$ | $f'(-1)$ | $f'(1)$ |

odredimo Hermiteov interpolacioni polinom $H_3$,

$$H_3(x) = L_1(x) + (x+1)(x-1)H_1(x),$$

gde je

$$L_1(x) = \frac{1-x}{2} f(-1) + \frac{1+x}{2} f(1)$$

Lagrangeov interpolacioni polinom, a $H_1(x) = ax + b$ Hermiteov polinom prvog stepena. Dakle,

$$H_3(x) = \frac{1-x}{2}\, f(-1) + \frac{1+x}{2}\, f(1) + (x+1)(x-1)(ax+b),$$

$$H_3'(x) = -\frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1) + 2x(ax+b) + (x^2-1)a.$$

Zamenom $x$ sa $-1$, odnosno 1, imamo

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} H_3'(-1) = -\frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1) + 2(a-b) = f'(-1), \\ \quad H_3'(1) = -\frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1) + 2(a+b) = f'(1). \end{cases}$$

Rešavanjem sistema (2) po $a$ i $b$ dobijamo

$$a = \frac{1}{4}[f(-1) - f(1) + f'(-1) + f'(1)], \quad b = -\frac{1}{4}[f'(-1) - f'(1)].$$

Dakle,

$$H_3(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{4}\, f(-1) + \frac{-x^3 + 3x + 2}{4}\, f(1)$$
$$+ \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{4}\, f'(-1) + \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4}\, f'(1).$$

Integracijom poslednje jednakosti nalazimo

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \int_{-1}^{1} H_3(x)\, dx &= \frac{f(-1)}{4} \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx + \frac{f(1)}{4} \int_{-1}^{1} (-x^3 + 3x + 2)\, dx \\ &+ \frac{f'(-1)}{4} \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx + \frac{f'(1)}{4} \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)\, dx \\ &= f(-1) + f(1) + \frac{1}{3} f'(-1) - \frac{1}{3} f'(1). \end{aligned}$$

Sada, pod uslovom da $f \in C^4[-1, 1]$, imamo (videti [2, str. 54])

$$\text{(4)} \qquad f(x) = H_3(x) + r(f, x),$$

gde su

$$r(f, x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\, \Omega(x) \quad (-1 < \eta < 1) \quad \text{i} \quad \Omega(x) = (x-1)^2 (x+1)^2 = (x^2 - 1)^2 \,.$$

Integracijom jednakosti (4), uz korišćenje (3), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} H_3(x)\,dx + \int_{-1}^{1} r(f,x)\,dx \\
&= f(-1) + f(1) + \frac{1}{3} f'(-1) - \frac{1}{3} f'(1) + R(f),
\end{aligned} \tag{5}
$$

gde je

$$
R(f) = \int_{-1}^{1} r(f,x)\,dx = \frac{1}{4!} \int_{-1}^{1} f^{(4)}(\eta)\Omega(x)\,dx\,.
$$

Napomenimo da je $\eta$ funkcija od $x$. No, s obzirom da je $\Omega(x)$ nenegativna funkcija na $[-1,1]$, možemo na poslednji integral da primenimo teoremu o srednjoj vrednosti određenog integrala i tako dobijamo

$$
R(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^{1} \Omega(x)\,dx = \frac{2}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{0}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx = \frac{2}{45} f^{(4)}(\xi),
$$

gde je $\xi \in (-1,1)$.

Iskoristimo sada formulu (5) za približno izračunavanje integrala

$$
I = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt.
$$

Ako uvedemo smenu $t = (x+1)\pi/4$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \sin \frac{\pi}{4}(x+1)\,dx \\
&\cong \frac{\pi}{4} \left[ \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} \cos 0 - \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{12} \right) \cong 0.991,
\end{aligned}
$$

pri čemu za grešku pri izračunavanju integrala $I$ važi

$$
\begin{aligned}
|R(f)| &= \left| R\left( \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}(x+1) \right) \right| = \frac{2}{45} \left| \frac{\pi}{4} \sin^{(4)} \frac{\pi}{4}(\xi+1) \right| \\
&= \frac{2}{45} \left( \frac{\pi}{4} \right)^5 \left| \sin \frac{\pi}{4}(\xi+1) \right| \le \frac{2}{45} \left( \frac{\pi}{4} \right)^5 < 1.33 \times 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

**7.2.32.** Zamenjujući funkciju $f$ odgovarajućim interpolacionim polinomom, odrediti koeficijente $A_1, A_2, A_3$ i ostatak $R(f)$ u kvadraturnoj formuli

$$
\int_0^1 f(x)\,dx = A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f'(0) + R(f).
$$

Primenom dobijene formule približno izračunati integral $I = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$ i proceniti grešku.

**Rešenje.** Zadatak se rešava slično prethodnom. Ovde dobijamo

$$A_1 = \frac{2}{3},\ A_2 = \frac{1}{3},\ A_3 = \frac{1}{6}, \quad R(f) = -\frac{f'''(\xi)}{72}, \quad \xi \in (0,1),$$

$$I = \frac{\pi}{3}, \quad |R(\cos t)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{\pi^3}{576} < 8.46 \times 10^{-2}.$$

**VI** G L A V A

# Približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina

## 8.1. Analitički metodi za rešavanje Cauchyevog problema

**8.1.1.** Taylorovim metodom odrediti približno rešenje Cauchyevog problema

$$y'(x) = x^2 + y(x)^2\,, \qquad y(0) = 1\,. \tag{1}$$

**Rešenje.** S obzirom da je $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ analitička funkcija u tački $(0, 1)$, na osnovu teoreme 1.1.4 ([3, str. 9]) postoji jedinstveno rešenje $x \mapsto y(x)$, koje je analitičko u tački $x_0 = 0$, Cauchyevog problema (1). Drugim rečima, $y(x)$ ima u okolini $x_0 = 0$ izvode proizvoljnog reda, pa je

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots\,. \tag{2}$$

Na osnovu (1) možemo izračunati potrebne izvode $y^{(i)}(0)$ $(i = 1, 2, \dots)$. Naime, imamo redom

$$\begin{aligned}
y' &= x^2 + y^2, & y_0' &= x_0^2 + y_0^2 = 1,\\
y'' &= 2x + 2yy', & y_0'' &= 2x_0 + 2y_0y_0' = 2,\\
y''' &= 2 + 2yy'' + 2(y')^2, & y_0''' &= 2 + 2y_0y_0'' + 2(y_0')^2 = 8,\\
y^{(4)} &= 2yy''' + 6y'y'', & y_0^{(4)} &= 2y_0y_0''' + 6y_0'y_0'' = 28,
\end{aligned}$$

gde smo stavili $y_0^{(i)} = y^{(i)}(x_0) = y^{(i)}(0)$.

Zamenom dobijenih vrednosti u (2) dobijamo

$$y(x) = 1 + x + 2\,\frac{x^2}{2!} + 8\,\frac{x^3}{3!} + 28\,\frac{x^4}{4!} + \cdots\,,$$

tj.

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}\,x^3 + \frac{7}{6}\,x^4 + \cdots\,.$$

**8.1.2.** Primeniti Taylorov metod na problem

$$y'(x) = x^2 + y(x)\,, \qquad y(1) = 1\,. \tag{1}$$

**Rešenje.** Rešenje tražimo u obliku

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}\,(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \cdots\,. \tag{2}$$

Na osnovu (1), sukcesivnim diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned}
&y' = x^2 + y\,, && y'(1) = 2\,,\\
&y'' = 2x + y'\,, && y''(1) = 4\,,\\
&y''' = 2 + y''\,, && y'''(1) = 6\,,\\
&y^{(k)} = y^{(k-1)}\,, && y^{(k)}(1) = y^{(k-1)}(1) = 6 \quad (k = 4, 5, \dots)\,,
\end{aligned}$$

pa je, na osnovu (2),

$$y(x) = 1 + \frac{2}{1!}\,(x-1) + \frac{4}{2!}\,(x-1)^2 + 6\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}\,. \tag{3}$$

Uzimanjem samo konačno mnogo članova reda u (3) dobili bismo približno rešenje problema (1). Međutim, u ovom slučaju možemo prepoznati tačno rešenje problema (1). Naime, na osnovu (3) imamo

$$\begin{aligned}
y(x) &= 1 + 2\,(x-1) + 2\,(x-1)^2\\
&\quad + 6\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}\right) - 6\left(1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!}\right)\\
&= 6\,e^{x-1} - x^2 - 2x - 2\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

s obzirom da je

$$e^{x-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}\,.$$

**8.1.3.** Korišćenjem 1° Taylorovog metoda; 2° metoda neodređenih koeficijenata, rešiti Cauchyev problem

$$y'(x) = y(x) + 3x^2 - x^3\,, \qquad y(1) = 1 \tag{1}$$

i prokomentarisati dobijeno rešenje.

**Rešenje.** 1° Rešenje tražimo u obliku

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots . \tag{2}$$

Na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned}
y' &= y + 3x^2 - x^3 , & y'(1) &= 3 , \\
y'' &= y' + 6x - 3x^2 , & y''(1) &= 6 , \\
y''' &= y'' + 6 - 6x , & y'''(1) &= 6 , \\
y^{(4)} &= y''' - 6 , & y^{(4)}(1) &= 0 , \\
y^{(k)} &= y^{(k-1)} , & y^{(k)}(1) &= 0 , \quad (k = 5, 6, \dots) .
\end{aligned}$$

Zamenom dobijenih vrednosti u (2) dobijamo

$$y(x) = 1 + \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = x^3 ,$$

što je i tačno rešenje problema (1).

Jasno je da Taylorovim metodom možemo dobiti tačno rešenje Cauchyevog problema samo onda kada je to rešenje polinomskog oblika, kao što je to ovde bio slučaj.

2° Za razliku od Taylorovog metoda, ovde rešenje problema (1) tražimo u obliku

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots , \tag{3}$$

gde nepoznate koeficijente $a_k$ $(k = 0, 1, \dots)$ formalno određujemo iz uslova da (3) zadovoljava problem (1). Očigledno je, na osnovu početnog uslova, $a_0 = 1$.

S obzirom na (3), imamo

$$y'(x) = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \cdots$$

pa zamenom u (1) dobijamo

$$\begin{aligned}
a_1 &+ 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + \cdots + na_n(x-1)^{n-1} + \cdots \\
&= 1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots + a_{n-1}(x-1)^{n-1} \\
&\quad + \cdots + 3x^2 - x^3 .
\end{aligned}$$

Poslednja jednakost, posle smene $t = x - 1$, postaje

$$\begin{aligned}
(a_1 - 3) &+ (2a_2 - a_1 - 3)\,t + (3a_3 - a_2)\,t^2 + (4a_4 - a_3 + 1)\,t^3 \\
&+ \cdots + (na_n - a_{n-1})\,t^{n-1} + \cdots = 0 ,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 3\,, \quad a_2 = \frac{1}{2}\,(a_1+3) = 3\,, \quad a_3 = \frac{1}{3}\,a_2 = 1\,, \quad a_4 = \frac{1}{4}\,(a_3-1) = 0\,,\\
&a_n = \frac{1}{n}\,a_{n-1} = 0 \qquad (n = 5, 6, \dots)\,.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$y(x) = 1 + 3\,(x-1) + 3\,(x-1)^2 + (x-1)^3 = x^3\,.$$

Naravno, dobijeno rešenje je isto kao i ono pri korišćenju Taylorovog metoda s obzirom da se i po jednom i po drugom metodu traži rešenje u istom obliku. Jedina razlika je u metodologiji dobijanja koeficijenata uz odgovarajuće stepene od $x - x_0$ $(x_0 = 1)$.

**8.1.4.** Primeniti Picardov metod u rešavanju diferencijalne jednačine

$$y' = -xy\,(2+y)\,, \qquad y(0) = 1$$

i izvršiti ocenu greške dobijenog približnog rešenja.

**Rešenje.** Picardov metod sukcesivnih aproksimacija, za rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0\,, \tag{1}$$

sastoji se u generisanju niza funkcija $\left\{y^{[s]}(x)\right\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ pomoću iterativnog procesa

$$y^{[s+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{[s]}(t)\right)\,dt \qquad (s = 0, 1, \dots)\,. \tag{2}$$

Najčešće se uzima $y^{[0]}(x) = y_0$.

Neka su na pravougaoniku $D = \left\{(x,y) : |x-x_0| \le \alpha,\ |y-y_0| \le \beta\right\}$ ispunjeni uslovi:

1° $f$ je neprekidna funkcija i $|f(x,y)| \le M$;

2° $f$ zadovoljava Lipshitzov uslov po $y$ sa konstantom $L$;

3° $h \le \min\left(\alpha,\ \dfrac{\beta}{M}\right)$.

Tada u $I = [x_0 - h,\ x_0 + h]$ postoji jedinstveno rešenje Cauchyevog problema (1) i iterativni proces (2) konvergira ka tom rešenju, tj. važi $\lim\limits_{s\to\infty} y^{[s]}(x) = y(x)$ $(x \in I)$ (videti teoremu 1.1.2 [3, str. 7]).

Naravno, u praktičnim primenama Picardovog metoda, iterativni proces (2) završavamo za neko $s$ i dobijena vrednost $y^{[s]}(x)$ predstavlja približnu vrednost rešenja $y(x)$. Pri ovome činimo neku grešku koju možemo proceniti na osnovu

$$\left|y^{[s]}(x) - y(x)\right| \le M\,L^s\,\frac{|x-x_0|^{s+1}}{(s+1)!} \qquad (x \in I) \tag{3}$$

(videti teoremu 1.4.1 [3, str. 12]).

Vraćamo se sada postavljenom zadatku u kome su $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ f(x,y) = -xy\,(2+y)$. Uzimajući $y^{[0]} = y_0 = 1$, na osnovu (2) dobijamo

$$\begin{aligned} y^{[1]} &= 1 + \int_0^x (-t)\,1\,(2+1)\,dt = 1 - \frac{3}{2}\,x^2\,,\\ y^{[2]} &= 1 + \int_0^x (-t)\left(1 - \frac{3}{2}\,t^2\right)\left(2 + 1 - \frac{3}{2}\,t^2\right)\,dt\\ &= 1 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x^4 - \frac{3}{8}\,x^6\,, \end{aligned}$$

itd. Ocenimo sada grešku aproksimacije $y^{[2]}(x)$ korišćenjem nejednakosti (3). Kako je funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y) = -xy\,(2+y)$ definisana i neprekidna za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, to za $\alpha$ i $\beta$ možemo izabrati proizvoljne brojeve. Uzmimo, na primer, $\alpha = \dfrac{1}{3},\ \beta = \dfrac{3}{2}$. Tada je

$$D = \left\{(x,y) : |x| \le \frac{1}{3},\ |y-1| \le \frac{3}{2}\right\}\,,$$

$$M = \max_{x,y\in D} |f(x,y)| = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}\,,$$

$$L = \max_{x,y\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2\cdot\frac{1}{3}\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{3}\,.$$

S obzirom na nejednakost $h \le \min\left(\alpha,\ \dfrac{\beta}{M}\right) = \min\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{3}$, za segment $I$ možemo uzeti $\left[-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right]$. Na osnovu (3) imamo

$$\left|y^{[2]}(x) - y(x)\right| \le \frac{15}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^2\frac{|x|^3}{3!} = \frac{245}{72}\,|x|^3\,,$$

tj.

$$\max_{x\in I}\left|y^{[2]}(x) - y(x)\right| \le \frac{245}{72}\cdot\frac{1}{3^3} \cong 0.126\,.$$

Ocena greške po formuli (3) u mnogim slučajevima može biti komplikovana. Jedan praktičan kriterijum za prekidanje iterativnog procesa (2) je

$$\left|y^{[s]}(x) - y^{[s-1]}(x)\right| \le \varepsilon \qquad (x \in I)\,,$$

gde je $\varepsilon$ unapred zadata tačnost.

**8.1.5.** Primeniti Picardov metod na problem

$$y'' = 2\,(xy' + y)\,, \qquad y(0) = 1\,,\;\; y'(0) = 0$$

i na osnovu četiri sukcesivne aproksimacije odrediti tačno rešenje zadatog problema.

**Rešenje.** Cauchyev problem za diferencijalne jednačine višeg reda

$$\text{(1)}\qquad y^{(m)} = f\left(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(m-1)}\right)\,, \quad y^{(i)}(x_0) = y_{i0}\;\; (i = 0, 1, \dots, m-1)\,,$$

može se svesti na sistem diferencijalnih jednačina prvog reda. Naime supstitucijama

$$z_1 = y\,,\; z_2 = y'\,,\dots,\, z_m = y^{(m-1)}\,,$$

problem (1) se svodi na sistem

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2\,,\\ z_2' &= z_3\,,\\ &\;\vdots\\ z_{m-1}' &= z_m\,,\\ z_m' &= f(x;\, z_1,\, z_2, \dots,\, z_m)\,, \end{aligned}$$

sa uslovima

$$z_i(x_0) = z_{i0} = y_{i-1,0} \qquad (i = 1, \dots, m)\,,$$

što možemo predstaviti u vektorskom obliku

$$\text{(2)}\qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,, \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0\,,$$

gde su

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{00}\\ y_{10}\\ \vdots\\ y_{m-1,0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} z_2\\ z_3\\ \vdots\\ f(x;\, z_1,\, z_2, \dots,\, z_m) \end{bmatrix}.$$

Picardov metod sukcesivnih aproksimacija može se generalisati na vektorski oblik

$$\text{(3)} \qquad \boldsymbol{y}^{[s+1]} = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{y}^{[s]}(t)\right) dt \qquad (s = 0, 1, \dots),$$

za rešavanje Cauchyevog problema (2).

Na osnovu prethodno rečenog, za problem postavljen zadatkom, imamo

$$z_1 = y, \quad z_2 = y',$$

tj.

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= 2\,(xz_2 + z_1), \end{aligned}$$

uz uslove

$$z_1(0) = 1, \quad z_2(0) = 0,$$

ili u vektorskom obliku

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

gde su

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} z_2 \\ 2\,(xz_2 + z_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = 0.$$

Primenom Picardovog metoda (3), dobijamo

$$\boldsymbol{y}^{[s+1]} = \begin{bmatrix} z_1^{[s+1]} \\ z_2^{[s+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^x z_2^{[s]}\, dt \\ \displaystyle\int_0^x 2\left(tz_2^{[s]} + z_1^{[s]}\right) dt \end{bmatrix} \qquad (s = 0, 1, \dots),$$

a dalje uzimajući $\boldsymbol{y}^{[0]} = \boldsymbol{y}_0$, za $s = 0, 1, 2, 3$, dobijamo redom

$$\boldsymbol{y}^{[1]} = \begin{bmatrix} z_1^{[1]} \\ z_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^x 0 \cdot dt \\ \displaystyle\int_0^x 2 \cdot dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}^{[2]} = \begin{bmatrix} z_1^{[2]} \\ z_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^x 2 \cdot dt \\ \displaystyle\int_0^x \left(4t^2 + 2\right) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x^2 \\ 2x + \dfrac{4}{3}\,x^3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}^{[3]} = \begin{bmatrix} z_1^{[3]} \\ z_2^{[3]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^x \left(2t + \frac{4}{3}\,t^3\right) dt \\ \displaystyle\int_0^x \left(2 + 6t^2 + \frac{8}{3}\,t^4\right) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{3} \\ 2x + 2x^3 + \dfrac{8}{15}\,x^5 \end{bmatrix}$$

i na kraju, a s obzirom da nas interesuje samo prva komponenta vektora $\boldsymbol{y}^{[4]}$ (to je $z_1^{[4]} = y^{[4]}$), dobijamo

$$y^{[4]} = z_1^{[4]} = 1 + \int_0^x \left(2t + 2t^3 + \frac{8}{15}\,t^5\right) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{8}{90}\,x^6 \,.$$

S obzirom da će zadnji sabirak u izrazu za $z_1^{[4]}$ pretrpeti transformaciju u narednoj aproksimaciji, što zaključujemo iz prethodnog ponašanja novodobijenih aproksimacija, možemo uzeti da je

$$y \cong 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots \,,$$

pa kako je $e^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, imamo da je $y \cong e^{x^2}$. S obzirom da $y = e^{x^2}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu i početne uslove date zadatkom, zaključujemo da je to i tačno rešenje datog problema.

## 8.2. Linearni višekoračni metodi

**8.2.1.** Za koje vrednosti parametra $b$ je metod

(1) $$y_{n+3} - y_{n+2} + b\,y_{n+1} - b\,y_n = \frac{h}{12}\,[(23-b)\,f_{n+2} - 8(2-b)\,f_{n+1} + 5(1+b)\,f_n]$$

konvergentan. Za tako dobijene vrednosti parametra $b$ ispitati red metoda.

**Rešenje.** Opšti linearni višekoračni metod za rešavanje Cauchyevog problema

(2) $$y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0 \quad (x_0 \le x \le b)\,,$$

može se predstaviti u obliku

(3) $$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \beta_i\, f_{n+i} \qquad (n = 0, 1, \dots)\,,$$

gde $\{y_n\}$ označava niz približnih vrednosti rešenja problema (2) u tačkama $x_n = x_0 + nh$ $\left(h = \dfrac{b - x_0}{N}\right)$, $n = 0, 1, \dots, N$ i $f_n \equiv f(x_n, y_n)$, a $\alpha_i$ i $\beta_i$ su konstantni koeficijenti koji definišu linearni višekoračni metod. Da bi se obezbedila njihova jednoznačnost, uzima se $\alpha_k = 1$.

Upoređivanjem (1) i (3) za $k = 3$, imamo

$$\alpha_0 = -b\,, \quad \alpha_1 = b\,, \quad \alpha_2 = -1\,, \quad \alpha_3 = 1\,,$$

$$\beta_0 = \frac{5}{12}\,(1+b)\,, \quad \beta_1 = -\frac{2}{3}\,(2-b)\,, \quad \beta_2 = \frac{1}{12}\,(23-b)\,, \quad \beta_3 = 0\,.$$

S obzirom da je $\beta_3 = 0$, metod je eksplicitnog tipa.

Potrebni i dovoljni uslovi za konvergenciju linearnog višekoračnog metoda su konzistencija i nula-stabilnost.

Ispitajmo najpre konzistenciju. Kako je (videti [3, str. 22])

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -b + b - 1 + 1 = 0\,,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ &= b + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 - \left[\frac{5}{12}\,(1+b) - \frac{2}{3}\,(2-b) + \frac{1}{12}\,(23-b) + 0\right] = 0\,, \end{aligned}$$

zaključujemo da je red metoda $p \geq 1$, tj. metod je konzistentan za svako $b$.

Prvi karakterističan polinom, u ovom slučaju je dat sa

$$\begin{aligned} \rho(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i\, \xi^i &= -b + b\xi - \xi^2 + \xi^3 \\ &= b\,(\xi - 1) + \xi^2(\xi - 1) \\ &= (\xi - 1)\big(\xi^2 + b\big)\,. \end{aligned}$$

Nule polinoma $\rho$ su

$$\xi_1 = 1 \quad \text{i} \quad \xi_{2,3} = \begin{cases} \pm\sqrt{-b} & (b \leq 0) \\ \pm i\sqrt{b} & (b > 0)\,. \end{cases}$$

S obzirom da je linearni višekoračni metod nula-stabilan ako prvi karakteristični polinom nema nula sa modulom većim od jedinice i ako su sve nule sa modulom jedan proste, uslov nula-stabilnosti se može iskazati kroz sledeća dva slučaja:

1° Za $b \leq 0$ je $|\xi_{2,3}| = |\pm\sqrt{-b}\,| = \sqrt{-b}$, pa zaključujemo da je $-1 < b \leq 0$. Napomenimo da mogućnost $b = -1$ otpada. Naime, tada bismo imali $\xi_1 = \xi_2 = 1$ (dvostruka nula na jediničnom krugu).

2° Za $b > 0$ imamo $|\xi_{2,3} = |\pm i\sqrt{b}\,| = \sqrt{b}$, odakle zaključujemo da je $0 < b \leq 1$ uslov nula stabilnosti. (Primetimo da za $b = 1$ imamo sve tri nule sa modulom jedan, ali proste, tj. $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = i,\ \xi_3 = -i$.)

Dakle, na osnovu 1° i 2° sleduje da je za $-1 < b \le 1$ metod (1) nula-stabilan, a samim tim i konvergentan, s obzirom na konzistenciju za svako $b$.

Odredimo sada red metoda za $-1 < b \le 1$. S obzirom da je $p \ge 1$ i

$$C_j = \frac{1}{j!}\Big[\alpha_1 + 2^j\,\alpha_2 + 3^j\,\alpha_3\Big] - \frac{1}{(j-1)!}\Big[\beta_1 + 2^{j-1}\,\beta_2 + 3^{j-1}\,\beta_3\Big] \quad (j=2,3,\dots)$$

[3, str. 22], nalazimo $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ i $C_4 = \dfrac{1}{24}(9+b) \neq 0$, pa zaključujemo da je red metoda $p = 3$.

Primetimo da bismo za $b = -9$ povećali red metoda, ali on tada ne bi bio konvergentan.

**8.2.2.** Konstruisati optimalni četvoro-koračni metod ($k = 4$).

**Rešenje.** Nula-stabilan $k$-koračni metod koji ima red $k+2$ naziva se optimalni metod. Za $k = 4$, opšti četvorokoračni metod možemo predstaviti sa

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i\, y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{4} \beta_i\, f_{n+i}\,.$$

Da bi konstante $\alpha_i$, $\beta_i$ $(i = 0,1,2,3,4)$ bile jednoznačno odredive, uzmimo $\alpha_4 = 1$.

Poznato je da kod optimalnog metoda sve nule prvog karakterističnog polinoma

$$\rho(\xi) = \xi^4 + \alpha_3\,\xi^3 + \alpha_2\,\xi^2 + \alpha_1\,\xi + \alpha_0\,, \tag{1}$$

leže na jediničnom krugu.

Iz uslova konzistentnosti sleduje $C_0 = \rho(1) = 0$, pa je jedna nula polinoma $\rho(\xi)$ jednaka $\xi_1 = 1$.

Iz uslova nula-stabilnosti sve nule polinoma $\rho$ moraju biti proste (s obzirom da se nalaze na jediničnom krugu), a ima ih četiri obzirom da je polinom $\rho$ četvrtog stepena. Poznato je da ako polinom sa realnim koeficijentima ima kompleksnu nulu, tada je i njena konjugovano kompleksna vrednost takođe nula polinoma. Dakle, $\rho(\xi)$ ima jednu nulu $\xi_1 = 1$, a preostale tri nule leže na jediničnom krugu, pa zaključujemo da su dve konjugovano kompleksne, a jedna preostala je realna i to $-1$, tj.

$$\xi_1 = 1\,, \quad \xi_2 = -1\,, \quad \xi_3 = e^{i\theta}\,, \quad \xi_4 = e^{-i\theta} \qquad (0 < \theta < \pi)\,.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= (\xi-1)(\xi+1)\big(\xi - e^{i\theta}\big)\big(\xi - e^{-i\theta}\big)\\ &= \big(\xi^2 - 1\big)\big(\xi^2 - 2\cos\theta\cdot\xi + 1\big)\\ &= \xi^4 - 2\cos\theta\,\xi^3 + 2\cos\theta\,\xi - 1\\ &= \xi^4 - 2a\,\xi^3 + 2a\,\xi - 1\,,\end{aligned} \tag{2}$$

gde smo stavili $a = \cos\theta$ $(-1 < a < 1)$.

Upoređivanjem (1) i (2) imamo

$$\alpha_4 = 1\,, \quad \alpha_3 = -2a\,, \quad \alpha_2 = 0\,, \quad \alpha_1 = 2a\,, \quad \alpha_0 = -1\,.$$

S obzirom da se radi o optimalnom metodu njegov red je $k+2 = 4+2 = 6$, pa $\beta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 4)$ određujemo iz uslova

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_0 = D_1 = \cdots = D_6 = 0\,,$$

gde su [3, str. 23]

$$\begin{aligned}
&D_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k\,,\\
&D_1 = -t\,\alpha_0 + (1-t)\,\alpha_1 + (2-t)\,\alpha_2 + \cdots + (k-t)\,\alpha_k - (\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)\,,\\
&D_j = \frac{1}{j!}\Big[(-t)^j\alpha_0 + (1-t)^j\alpha_1 + \cdots + (k-t)^j\alpha_k\Big]\\
&\qquad - \frac{1}{(j-1)!}\Big[(-t)^{j-1}\beta_0 + (1-t)^{j-1}\beta_1 + \cdots + (k-t)^{j-1}\beta_k\Big] \quad (j=2,3,\ldots).
\end{aligned} \tag{3}$$

Ako u (3) uvrstimo prethodno određene vrednosti za $\alpha_i$, uzmemo $t = 2$ i $k = 4$, dobijamo

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 4 - 4a\,, \tag{4}$$

$$-2\beta_0 - \beta_1 + \beta_3 + 2\beta_4 = 0\,, \tag{5}$$

$$4\beta_0 + \beta_1 + \beta_3 + 4\beta_4 = \frac{2}{3}\,(8 - 2a)\,, \tag{6}$$

$$-8\beta_0 - \beta_1 + \beta_3 + 8\beta_4 = 0\,, \tag{7}$$

$$16\beta_0 + \beta_1 + \beta_3 + 16\beta_4 = \frac{2}{5}\,(32 - 2a)\,, \tag{8}$$

$$-32\beta_0 - \beta_1 + \beta_3 + 32\beta_4 = 0\,. \tag{9}$$

Iz simetrije koja postoji u jednakostima (5), (7), (9) zaključujemo da je $\beta_0 = \beta_4$, $\beta_1 = \beta_3$. Jednačine (6) i (8) se svode na

$$\begin{aligned}
4\beta_0 + \beta_1 &= \frac{1}{3}\,(8 - 2a)\,,\\
16\beta_0 + \beta_1 &= \frac{1}{5}\,(32 - 2a)\,,
\end{aligned}$$

odakle je $\beta_0 = \beta_4 = \dfrac{1}{45}\,(14 + a)$, $\beta_1 = \beta_3 = \dfrac{1}{45}\,(64 - 34a)$ a iz (4) dobijamo $\beta_2 = \dfrac{1}{15}\,(8 - 38a)$.

Konstanta greške $C_7$ ovog metoda je

$$C_7 = D_7 = -\frac{16+15a}{1890} \neq 0 \qquad (-1 < a < 1)\,.$$

Dakle, dobili smo familiju optimalnih četvorokoračnih metoda sa slobodnim parametrom $a \in (-1,1)$. Na primer, za $a = 4/19$ dobija se Quadeov metod

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}\,(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}\,(f_{n+4} + 4\,(f_{n+3} + f_{n+1}) + f_n)\ .$$

**8.2.3.** Konstruisati trokoračni Nyströmov metod $\big(\rho(r) = r^{k-2}(r^2-1)$, eksplicitan$\big)$.

Tako dobijen metod primeniti na rešavanje model problema

$$y' = 2xy\,, \quad y(0) = 1 \qquad (0 \le x \le 0.5)\,,$$

sa korakom $h = 0.1$.

**Rešenje.** Eksplicitni metodi kod kojih je prvi karakteristični polinom oblika

$$\rho(\xi) = \xi^{k-2}(\xi^2 - 1) \qquad (k \ge 2)\,,$$

nose naziv Nyströmovi metodi. S obzirom da su nule polinoma $\rho$ date sa $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_j = 0$ $(j = 3,4,\dots,k)$, zaključujemo da je kod ovih metoda obezbeđena nula-stabilnost.

Za $k = 3$ je

$$\rho(\xi) = \xi^3 - \xi\,,$$

a imajući u vidu da je

$$\rho(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\xi^2 + \alpha_3\,\xi^3\,,$$

imamo $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Koeficijent $\beta_3 = 0$ s obzirom da je metod eksplicitan. Koeficijente $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ odredićemo sa stanovišta maksimalnog reda metoda:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0\,,\\
C_2 &= \frac{1}{2!}\Big(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3\Big) - \frac{1}{1!}\,(\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3) = 0\,,\\
C_3 &= \frac{1}{3!}\Big(\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3\Big) - \frac{1}{2!}\,\Big(\beta_1 + 2^2\beta_2\Big) = 0\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 &= 2\,, \\ 2\,\beta_1 + 4\,\beta_2 &= 8\,, \\ 3\,\beta_1 + 12\,\beta_2 &= 26\,, \end{aligned}$$

odakle je $\beta_0 = \dfrac{1}{3},\ \beta_1 = -\dfrac{2}{3},\ \beta_2 = \dfrac{7}{3}$, pa je traženi Nyströmov metod

$$y_{n+3} - y_{n+1} = \frac{h}{3}\,(7\,f_{n+2} - 2\,f_{n+1} + f_n)\,. \tag{1}$$

S obzirom da je $C_4 = \dfrac{1}{3}$, metod je trećeg reda ($p = 3$).

Metod (1) je trokoračni. Da bismo ga primenili na rešavanje datog Cauchyevog problema, potrebne su nam tri startne vrednosti. Jedna je data zadatkom $y(0) = y_0 = 1$. Dakle, treba odrediti još dve.

Na osnovu Taylorovog metoda, a s obzirom da je $p = 3$, imamo:

$$y_1 = y(0) + h\,y'(0) + \frac{h^2}{2!}\,y''(0) + \frac{h^3}{3!}\,y'''(0) \qquad (h = 0.1)\,,$$

a na osnovu datog Cauchyevog problema je

$$\begin{aligned} y' &= 2xy\,, \quad y(0) = 1\,, \\ y'' &= 2y + 2xy'\,, \\ y''' &= 4y' + 2xy''\,, \end{aligned} \tag{2}$$

tj. $y'(0) = 0,\ y''(0) = 2,\ y'''(0) = 0$, pa je $y_1 = 1.01$. Dalje je

$$y_2 = y(0.1) + h\,y'(0.1) + \frac{h^2}{2!}\,y''(0.1) + \frac{h^3}{3!}\,y'''(0.1) \qquad (h = 0.1)\,,$$

gde uzimamo da je $y(0.1) \cong y_1 = 1.01$. Na osnovu (2), imamo $y'(0.1) \cong 0.202$, $y''(0.1) \cong 2.0604$, $y'''(0.1) \cong 1.22$, pa je $y_2 = 1.0407$.

Na osnovu konstruisanog metoda (1) i startnih vrednosti $y_0,\ y_1,\ y_2$ dobijeni su rezultati pregledno prikazani u tabeli

| $n$ | $x_n$ | $f_n$ | $y_n$ | $y(x_n) = e^{x_n^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.1 | 0.202 | 1.01 | 1.0100 |
| 2 | 0.2 | 0.41628 | 1.0407 | 1.0408 |
| 3 | 0.3 | 0.65622 | 1.0937 | 1.0942 |
| 4 | 0.4 | 0.93824 | 1.1728 | 1.1735 |
| 5 | 0.5 | | 1.2827 | 1.2840 |

U poslednjoj koloni tabele je tačno rešenje model problema.

**8.2.4.** Konstruisati influencnu funkciju za metod

$$(1)\quad y_{n+2}-(1+a)\,y_{n+1}+a\,y_n=\frac{h}{2}\,[(3-a)\,f_{n+1}-(1+a)\,f_n]\qquad (a\neq -5)\,.$$

Naći granicu za lokalnu grešku odsecanja kada se ovaj metod, za $a = 0$, primeni na rešavanje problema

$$(2)\qquad y'=4xy^{1/2}\,,\qquad y(0)=1\,.$$

**Rešenje.** Za dvokoračni metod ($k = 2$) koji ima red $p$, influencna funkcija je data sa

$$(3)\qquad G(t)=\sum_{i=0}^{2}\Big[\alpha_i\,(i-t)_+^p-p\,\beta_i\,(i-t)_+^{p-1}\Big]\,,$$

gde su, za metod (1),

$$\alpha_0=a\,,\qquad \alpha_1=-(1+a)\,,\qquad \alpha_2=1\,,$$

$$\beta_0=-\frac{1+a}{2}\,,\qquad \beta_1=\frac{3-a}{2}\,,\qquad \beta_2=0\,,$$

videti [3, str. 37]).

Lako nalazimo da je $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ i $C_3 = \dfrac{5+a}{12} \neq 0$, s obzirom da je $a \neq 5$, pa zaključujemo da je red metoda (1) $p = 2$.

Na osnovu (3), imamo

$$G(t)=a(-t)_+^2+(1+a)(-t)_+-(1+a)(1-t)_+^2-(3-a)(1-t)_++(2-t)_+^2$$

tj.

$$G(t)=\begin{cases}-at^2+(1+a)\,t & (0\le t\le 1)\,,\\ (2-t)^2 & (1<t\le 2)\,.\end{cases}$$

Za $a = 0$, metod (1) glasi

$$(4)\qquad y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{2}\,(3\,f_{n+1}-f_n)$$

a influencna funkcija je data sa

$$G(t)=\begin{cases} t & t\in[0,1]\,,\\ (2-t)^2 & t\in(1,2]\,. \end{cases} \tag{5}$$

S obzirom da je dati dvokoračni metod (4) eksplicitan ($\beta_2 = 0$), za lokalnu grešku odsecanja važi

$$T_{n+2} = y(x_{n+2}) - y_{n+2}\,,$$

pod uslovom da su ispunjene lokalne pretpostavke $y_{n+i} = y(x_{n+i})$ $(i = 0, 1)$ (videti [3, str. 37]).

S druge strane, pod uslovom da $G(t)$ ne menja znak na $[0, k]$ $(k = 2)$, kakav je slučaj sa influencnom funkcijom (5), važi

$$T_{n+k} = C_{p+1}\,h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n+\theta h) \qquad (0<\theta<k)\,,$$

$(p = 2,\ C_3 = \dfrac{5}{12},\ k = 2)$, pa je

$$|T_{n+2}| \le \frac{5}{12}\,h^3 Y_n\,, \tag{6}$$

gde je

$$Y_n = \max_{x\in[x_n,x_{n+2}]}\left|y'''(x)\right|\,.$$

U nejednakosti (6) $Y_n$ se može zameniti većom vrednošću

$$Y = \max_{x\in[x_0,b]}\left|y'''(x)\right|\,,$$

ako je $[x_0, b]$ interval na kome rešavamo Cauchyev problem (2).

Na osnovu (2) je

$$y' = 4xy^{1/2}\,,$$

a dalje

$$\begin{aligned} y'' &= 4\left(y^{1/2}+\frac{1}{2}\,xy^{-1/2}y'\right) = 4\left(y^{1/2}+\frac{1}{2}\,xy^{-1/2}\,4xy^{1/2}\right) = 4\left(2x^2+y^{1/2}\right)\,,\\ y''' &= 4\left(4x+\frac{1}{2}\,y^{-1/2}y'\right) = 4\left(4x+\frac{1}{2}\,y^{-1/2}\,4xy^{1/2}\right) = 24x\,, \end{aligned}$$

pa je

$$Y = \max_{x\in[x_0,b]} = |24x| = 24\,|b|\,.$$

Dakle, na osnovu (6), važi

$$|T_{n+2}| \le \frac{5}{12}\, h^3\, 24|b| = 10\, h^3 |b| \,.$$

Napomenimo da, uopšte, za lokalnu grešku odsecanja važi ocena

$$|T_{n+k}| \le h^{p+1} G Y \,,$$

gde su

$$G = \frac{1}{p!} \int_0^x |G(t)|\, dt \qquad \text{i} \qquad Y = \max_{x \in [x_0, b]} \left| y^{(p+1)}(x) \right| \,.$$

**8.2.5.** U zavisnosti od parametra $b$ odrediti red linearnog višekoračnog metoda

$$y_{n+2} + (b-1)\, y_{n+1} - b\, y_n = \frac{h}{4} \left[ (b+3)\, f_{n+2} + (3b+1)\, f_n \right] \,.$$

Za maksimalni red metoda ispitati njegovu nula-stabilnost. Ilustrovati divergenciju metoda za $b = -1$ primenom na problem $y' = y,\ y(0) = 1$, i rešavajući dobijenu diferencijalnu jednačinu uzimajući za početne vrednosti $y_0 = 1,\ y_1 = 1$.

**Rešenje.** Lako nalazimo da su

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}\,(b+1) \quad C_4 = -\frac{7b+9}{24} \,,$$

odakle zaključujemo da je red metoda

$$p = \begin{cases} 2, & b \ne -1 \,, \\ 3, & b = -1 \,. \end{cases}$$

Za maksimalni red $p = 3$ ($b = -1$), metod postaje

$$y_{n+2} - 2\, y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}\, (f_{n+2} - f_n) \,, \tag{1}$$

čiji je prvi karakteristični polinom dat sa

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, \xi^i = 1 - 2\xi + \xi^2 = (\xi - 1)^2 \,.$$

S obzirom da prvi karakteristični polinom ima dvostruku nulu $\xi_{1,2} = 1$ sa modulom koji je jednak jedinici, zaključujemo da metod (1) nije nula-stabilan, a samim tim ni konvergentan.

Za problem

$$y' = y\,, \qquad y(0) = 1\,, \tag{2}$$

čije je tačno rešenje $y(x) = e^x$, primenom metoda (1) dobija se diferencna jednačina

$$(2-h)\,y_{n+2} - 4\,y_{n+1} + (2+h)\,y_n = 0\,. \tag{3}$$

U ovom jednostavnom slučaju model-problema, lako rešavamo diferencnu jednačinu (3) čija je karakteristična jednačina

$$(2-h)r^2 - 4r + (2+h) = 0\,.$$

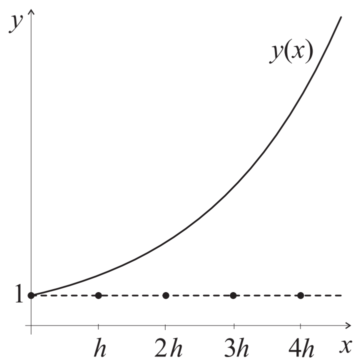
Koreni ove jednačine su $r_1 = \dfrac{2+h}{2-h}$, $r_2 = 1$, pa je opšte rešenje diferencne jednačine (3) dato sa

$$y_n = A_1 + A_2 \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^n\,. \tag{4}$$

Korišćenjem početnih vrednosti $y_0 = 1$ i $y_1 = 1 \cong y(h)$, dobijamo sistem jednačina

$$A_1 + A_2 = 1, \qquad A_1 + \frac{2+h}{2-h}\,A_2 = 1,$$

okakle su $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, a zatim, na osnovu (4), $y_n = 1$.




Sl. 1.

Dakle, za model problem (2), čije je tačno rešenje dato sa $y(x) = e^x$, metod (1) sa dobrim startnim vrednostima $y_0 = y_1 = 1$ (utoliko tačnijim ukoliko je $h$ manje), daje konstantno rešenje $y_n = 1$, što lepo ilustruje divergenciju posmatranog metoda (videti sliku 1).

**8.2.6.** Dat je metod

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{12}\left[(5+a)f_{n+2} + 8(1-a)f_{n+1} + (1+5a)f_n\right],$$

sa parametrom $a$, $-1 \le a < 1$.

a) Dokazati da je interval apsolutne stabilnosti ovog metoda $\left(6\,\dfrac{a+1}{a-1},\ 0\right)$, a relativne stabilnosti $\left(\dfrac{3}{2}\,\dfrac{a+1}{a-1},\ +\infty\right)$.

b) Dati ilustraciju ponašanja metoda u vezi sa intervalima stabilnosti, u slučaju $a = -0.75$, na model problemu

$$y' = -20\,y\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

**Rešenje.** Lako se može pokazati da je red metoda

$$p = \begin{cases} 3, & \text{za } a \neq -1\,, \\ 4, & \text{za } a = -1\,. \end{cases}$$

Prvi karakteristični polinom datog metoda je

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\,\xi^i = \xi^2 - (1+a)\,\xi + a = (\xi-1)(\xi-a)\,,$$

pa uslov, dat zadatkom, $-1 \le a < 1$, obezbeđuje nula-stabilnost.

Dakle, za $-1 \le a < 1$, s obzirom da je metod konzistentan i nula-stabilan, on je konvergentan.

a) Polinom stabilnosti datog metoda je

$$\pi\left(r, \bar{h}\right) = \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r) = Ar^2 + Br + C\,,$$

gde su

$$A = 1 - \frac{\bar{h}}{12}\,(5+a)\,, \quad B = -\left(1 + a + \frac{2}{3}\,\bar{h}\,(1-a)\right), \quad C = a + \frac{\bar{h}}{12}\,(1+5a),$$

a $\sigma(r)$ drugi karakteristični polinom.

Nule polinoma stabilnosti diktiraju interval apsolutne, tj. relativne stabilnosti (videti [3, str. 43–46]). Primetimo da je $\pi(r,0) = \rho(r)$, pa se dakle za $\bar{h} = 0$, nula $r_i$ polinoma stabilnosti poklapa sa nulom $\xi_i$ prvog karakterističnog polinoma. Može se pokazati da su $r_i$ neprekidne funkcije od $\bar{h}$. Dakle, $r_i = r_i(\bar{h}) \to \xi_i$ $(i = 1, \dots, k)$ kada $\bar{h} \to 0$.

Diskriminanta kvadratne jednačine $\pi\left(r, \bar{h}\right) = 0$ ima vrednost

$$\Delta = B^2 - 4AC = \frac{\bar{h}^2}{12}\bigl(7 - 2a + 7a^2\bigr) + \bar{h}\bigl(1 - a^2\bigr) + (1 - a)^2 .$$

Dalje, s obzirom da je diskriminanta za kvadratnu jednačinu po $\bar{h}$, $\Delta = 0$, data sa $\Delta_{\bar{h}} = -\dfrac{4}{3}(1 - a)^4 < 0$ i $7 - 2a + 7a^2 > 0$ $(-1 \le a < 1)$, zaključujemo da je $\Delta > 0$, pa su obe nule polinoma stabilnosti realne i različite.

Ako je $p$ red linearnog višekoračnog metoda, poznato je da važi asimptotska jednakost

$$r_1 = e^{\bar{h}} + O\bigl(\bar{h}^{\,p+1}\bigr) \qquad (\bar{h} \to 0)\,,$$

tj.

$$r_1 = 1 + \bar{h} + O\bigl(\bar{h}^{\,2}\bigr) \qquad (\bar{h} \to 0)\,.$$

Kako $r_2 \to \xi_2 = a$ $(\bar{h} \to 0)$, to je $r_2 = a + \gamma\,\bar{h} + O\bigl(\bar{h}^{\,2}\bigr)$, pa iz uslova $\pi\left(r_2, \bar{h}\right) = 0$ nalazimo $\gamma = (a - 1)^2/12$.

Dakle, za dovoljno malo $\bar{h}$, imamo

$$r_1 = 1 + \bar{h} + O\bigl(\bar{h}^{\,2}\bigr)\,, \qquad r_2 = a + \frac{(a-1)^2}{12}\,\bar{h} + O\bigl(\bar{h}^{\,2}\bigr)\,. \tag{1}$$

Linearni $k$-koračni metod ima interval apsolutne stabilnosti $(\alpha, \beta)$, ako za $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$ važi $\left|r_i\left(\bar{h}\right)\right| < 1$ $(i = 1, \dots, k)$. Na osnovu (1), iz uslova $|r_i(h)| < 1$ $(i = 1, 2)$ sleduje $\bar{h} < 0$, tj. $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0)$.

Dakle, znamo da su $r_i(\bar{h})$ $(i = 1, 2)$ realne, različite i neprekidne funkcije od $\bar{h}$. Na osnovu (1) zaključujemo da, za male, negativne vrednosti $\bar{h}$, je $r_1(\bar{h})$ nešto manje od jedan, a $r_2(\bar{h})$ nešto manje od $a$ $(-1 \le a < 1)$, ali veće od $-1$ za $-1 < a < 1$. Postavlja se pitanje: za koje vrednosti $\bar{h}$ će $r_1(\bar{h})$ ili $r_2(\bar{h})$ da dostignu vrednost 1 ili $-1$, tj. da izađu iz opsega $(-1, 1)$?

S obzirom da je za $r = 1$

$$\pi\left(1, \bar{h}\right) = (a - 1)\,\bar{h} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{h} = 0\,,$$

a za $r = -1$

$$\pi\left(-1, \bar{h}\right) = \frac{\bar{h}}{3}(1 - a) + 2\,(1 + a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{h} = 6\,\frac{a+1}{a-1} < 0\,,$$

zaključujemo da je interval apsolutne stabilnosti $\left(6\,\dfrac{a+1}{a-1},\ 0\right)$. Primetimo da se dati metod za $a = -1$ svodi na Simpsonovo pravilo koje spada u grupu optimalnih metoda, a na osnovu dobijenog rezultata ono nema interval apsolutne stabilnosti.

Linearni $k$-koračni metod ima interval relativne stabilnosti $(\alpha, \beta)$, ako za $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$ važi $|r_1| \geq |r_i|$ $(i = 2, \ldots, k)$. Za dati metod $(k = 2)$, tražimo interval za $\bar{h}$ tako da važi $|r_1| \geq |r_2|$.

Jednakost $|r_1| = |r_2|$ može eventualno da nastupi za $r_1 = -r_2$, s obzirom da su $r_1$ i $r_2$ realne i različite nule polinoma stabilnosti. Dakle, za $r_1 = -r_2$ imamo

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = -\frac{B}{A} = \frac{1 + a + \dfrac{2}{3}\,\bar{h}\,(1-a)}{1 - \dfrac{\bar{h}}{12}\,(5+a)} \quad \Longrightarrow \quad \bar{h} = \frac{3}{2}\,\frac{a+1}{a-1} < 0\,.$$

S obzirom da su $r_1 \equiv r_1(\bar{h})$ i $r_2 \equiv r_2(\bar{h})$ neprekidne funkcije, a za $\bar{h} = 0$ je $|r_1| = 1 > |r_2| = |a|$, zaključujemo da je interval relativne stabilnosti $\left(\dfrac{3}{2}\,\dfrac{a+1}{a-1},\ +\infty\right)$.

b) Za dati metod kod koga je $a = -3/4$, interval apsolutne stabilnosti (A.S.) i interval relativne stabilnosti (R.S.) po $\bar{h}$ su dati sa

$$\text{(A.S.)} \qquad I_1 = \left(6\,\frac{a+1}{a-1},\ 0\right)_{a=-3/4} = \left(-\frac{6}{7},\ 0\right)\,,$$

$$\text{(R.S.)} \qquad I_2 = \left(\frac{3}{2}\,\frac{a+1}{a-1},\ +\infty\right)_{a=-3/4} = \left(-\frac{3}{14},\ 0\right)\,.$$

S obzirom da je za dati model problem $\bar{h} = -20\,h$, za intervale stabilnosti po $h$ dobijamo

$$\text{(A.S.)} \qquad h < \frac{3}{70} \cong 0.04285\,,$$

$$\text{(R.S.)} \qquad h < \frac{3}{280} \cong 0.01071\,.$$

Primetimo da je stroži uslov za relativnu stabilnost.

Primenimo razmatrani dvokoračni metod, za $a = -3/4$, na dati model problem. Potrebne su nam dve startne vrednosti od kojih je jedna data zadatkom $y_0 = y(0) = 1$, a drugu određujemo Taylorovim metodom, tj. u ovom slučaju je

$$y_1 = \left(1 - 20\,h + 200\,h^2 - \frac{4000}{3}\,h^3\right)\,.$$

Inače, tačno rešenje model problema je $y(x) = e^{-20x}$.

Tabela 1

| $x$ | Tačno rešenje | Apsolutna greška metoda (1) za $a = -0.75$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $h = 0.01$ | $h = 0.02$ | $h = 0.05$ |
| 0.2 | 0.018 315 639 | $2\,613\,595 \cdot 10^{-12}$ | $1575 \cdot 10^{-7}$ | $29 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.4 | 0.000 335 463 | $97\,228 \cdot 10^{-12}$ | $342 \cdot 10^{-7}$ | $35 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.6 | 0.000 006 144 | $2\,703 \cdot 10^{-12}$ | $75 \cdot 10^{-7}$ | $42 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.8 | 0.000 000 113 | $67 \cdot 10^{-12}$ | $17 \cdot 10^{-7}$ | $50 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.0 | 0.000 000 002 | $2 \cdot 10^{-12}$ | $4 \cdot 10^{-7}$ | $59 \cdot 10^{-3}$ |

U tabeli 1 su pregledno dati rezultati primene datog metoda za $a = -3/4$, kada je korak $h = 0.01$, $h = 0.02$ i $h = 0.05$.

Objasnimo ponašanje apsolutne greške iz tabele.

Korak $h = 0.05$ ne pripada ni intervalu relativne ni intervalu apsolutne stabilnosti, tako da apsolutna greška raste sa porastom apscise.

Prisetimo se da je koncept apsolutne stabilnosti zasnovan na kontroli apsolutne greške, a koncept relativne stabilnosti na kontroli relativne greške. Korak $h=0.02$ pripada intervalu apsolutne stabilnosti, ali ne i intervalu relativne stabulnosti. Posledica toga je da apsolutna greška opada kako odmiče primena metoda, tj. sa porastom apscise. No, primetimo da apsolutna greška ne opada onom brzinom kojom opada rešenje model problema. Za korak $h = 0.01$, koji pripada i intervalu relativne stabilnosti, apsolutna greška opada i to u ritmu opadanja tačnog rešenja kako bi relativna greška ostala pod kontrolom.

**8.2.7.** Ispitati apsolutnu stabilnost metoda

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{2}\,(f_{n+1} + 3\,f_n)\,. \tag{1}$$

**Rešenje.** Ako za dato $\bar{h}$ sve nule $r_i$ polinoma stabilnosti $\pi(r,\bar{h}) = \rho(r) - \bar{h}\cdot\sigma(r)$ ($\rho(r)$ i $\sigma(r)$ su prvi i drugi karakteristični polinom, respektivno) ispunjavaju uslov $|r_i| < 1$ ($i = 1, \ldots, k$), tada kažemo da je linearni $k$-koračni metod apsolutno stabilan za dato $\bar{h}$; u protivnom kažemo da je apsolutno nestabilan. Ako je metod apsolutno stabilan za svako $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$, interval $(\alpha, \beta)$ nazivamo intervalom apsolutne stabilnosti.

Poznato je da se bilinearnom transformacijom $r \mapsto z = \dfrac{r-1}{r+1}$ oblast $|r| < 1$ u $r$-kompleksnoj ravni, preslikava u oblast $\operatorname{Re} z < 0$ u $z$-kompleksnoj ravni.

Hurwitzovi polinomi su oni polinomi koji imaju osobinu da su im sve nule sa realnim delom manjim od nule.

Znači, problem ispitivanja apsolutne stabilnosti višekoračnog metoda može se svesti na ispitivanje da li je polinom $P$, dat pomoću

$$P(z) = (1-z)^k \, \pi\left(\frac{1+z}{1-z}, \, \bar{h}\right) = (1-z)^k \left[\rho\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - \bar{h}\,\sigma\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right],$$

Hurwitzov.

Neka je

$$P(z) = a_0\, z^k + a_1\, z^{k-1} + \cdots + a_k\,. \tag{2}$$

Ako je $a_0 > 0$, polinom (2) je Hurwitzov ako i samo ako su sve veličine

$$a_1\,, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & & a_{2k-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_k \end{vmatrix}_{k\times k}$$

pozitivne, pri čemu je $a_j = 0$ $(j > k)$.

Imajući u vidu prethodno razmatranje, ispitajmo sada apsolutnu stabilnost metoda (1).

Polinom stabilnosti za metod (1) glasi

$$\begin{aligned} \pi\left(r, \bar{h}\right) = \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r) &= r^2 - 1 - \frac{\bar{h}}{2}\,(r+3) \\ &= r^2 - \frac{\bar{h}}{2}\,r - \left(1 + \frac{3}{2}\,\bar{h}\right), \end{aligned}$$

pa je, prema tome, polinom $P$ dat sa

$$\begin{aligned} P(z) &= (1-z)^2 \pi\left(\frac{1+z}{1-z}, \, \bar{h}\right) \\ &= (1-z)^2 \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{\bar{h}}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - \left(1 + \frac{3}{2}\,\bar{h}\right)\right] \\ &= a_0\, z^2 + a_1\, z + a_2\,, \end{aligned} \tag{4}$$

gde su $a_0 = -\bar{h},\ a_1 = 4 + 3\,\bar{h},\ a_2 = -2\,\bar{h}$.

Pretpostavimo da je $a_0 = -\bar{h} > 0$. Da bi polinom (4) bio Hurwitzov, na osnovu (3) imamo $a_1 > 0$ i $a_1 a_2 > 0$. Dakle, $a_0 > 0,\ a_1 > 0$ i $a_2 > 0$, a to je ispunjeno za $\bar{h} \in (-4/3, 0)$.

Pretpostavimo sada da je $a_0 = -\bar{h} < 0$. Pomnožimo polinom (4) sa minus jedan,

$$(-1)\,P(z) = -a_0\,z^2 - a_1\,z - a_2\,. \tag{5}$$

Polinom $(-1)\,P(z)$ je Hurwitzov za iste vrednosti $\bar{h}$ kao i polinom $P(z)$ (nule su im iste), ali je sada, s obzirom na učinjenu pretpostavku, $-a_0 > 0$. Da bi polinom (4), tj. (5), bio Hurwitzov, na osnovu (3), zahtevamo još $-a_1 > 0$ i $(-a_1)(-a_2) > 0$. Dakle, $a_0 < 0$, $a_1 < 0$ i $a_2 < 0$, što nije ispunjeno ni za jedno $\bar{h}$.

Iz svega, zaključujemo da je interval apsolutne stabilnosti za metod (1) dat sa $\bar{h} \in (-4/3, 0)$.

**8.2.8.** Dat je linearni višekoračni metod

$$y_{n+3} - y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}\,(5f_{n+3} + 7f_{n+2} + 7f_{n+1} + 5f_n)\,.$$

a) Naći red $p$ i konstantu greške $C_{p+1}$.

b) Ispitati konvergenciju metoda.

c) Ispitati egzistenciju intervala apsolutne stabilnosti.

d) Na osnovu dobijenih karakteristika prokomentarisati metod.

**Rešenje.** a) S obzirom da je $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = -\dfrac{19}{360}$, zaključujemo da su red metoda i konstanta greške redom

$$p = 4\,, \qquad C_5 = -\frac{19}{360}\,.$$

b) Prvi karakteristični polinom datog metoda

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i\,\xi^i = \xi^3 - \xi^2 + \xi - 1 = \bigl(\xi^2 + 1\bigr)(\xi - 1)$$

ima nule $\xi_1 = 1$, $\xi_{2,3} = \pm i$. Dakle, nema nula sa modulom većim od jedinice i sve nule sa modulom jedan su proste, pa je metod nula-stabilan. Kako je on i konzistentan ($p = 4 \geq 1$) sleduje da je i konvergentan.

c) Polinom stabilnosti je

$$\pi\bigl(r, \bar{h}\bigr) = \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r) = r^3 - r^2 + r - 1 - \frac{\bar{h}}{12}\bigl(5r^3 + 7r^2 + 7r + 5\bigr)$$

ili, ako uvedemo smenu $a = \dfrac{\bar{h}}{12}$,

$$\pi\big(r, \bar{h}\big) = (1 - 5a)\, r^3 - (1 + 7a)\, r^2 + (1 - 7a)\, r - (1 + 5a)\,.$$

Imajući u vidu postupak u zadatku 8.2.7, smenom $r = \dfrac{1+z}{1-z}$ dobijamo

$$P(z) = (1 - z)^3\, \pi\left(\frac{1+z}{1-z},\, \bar{h}\right) = 4z^3 - \frac{4}{3}\,\bar{h}\, z^2 + 4z - 2\bar{h}\,.$$

Polinom $P(z)$ je Hurwitzov ako i samo ako važi

$$4 > 0\,, \quad -\frac{4}{3}\,\bar{h} > 0\,, \quad \left(-\frac{4}{3}\,\bar{h}\right)\cdot 4 - (-2\bar{h})\cdot 4 > 0\,, \quad (-2\bar{h}) > 0\,,$$

što nije istovremeno zadovoljeno ni za jedno $\bar{h}$, pa metod, dat zadatkom, nema interval apsolutne stabilnosti.

d) S obzirom da je metod konvergentan ($\forall x \in [x_0, b]$, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x-x_0=nh}} y_n = y(x)$), uzimanjem dovoljno malog koraka $h$ u primeni metoda na neki Cauchyev problem, numerička vrednost rešenja će biti približno jednaka tačnoj vrednosti (ukoliko je $h$ manje, utoliko je numeričko rešenje tačnije). No, nepostojanje intervala apsolutne stabilnosti nam nagoveštava da će apsolutna greška ($e_n = |y(x_n) - y_n|$) da raste sa porastom $n$ ($x_n = x_0 + nh$).

**8.2.9.** Neka su prediktor P i korektori $\mathrm{C}^{(1)}$ i $\mathrm{C}^{(2)}$ definisani pomoću svojih karakterističnih polinoma i to:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\ : && \rho^*(\xi) = \xi^4 - 1\,, && \sigma^*(\xi) = \frac{4}{3}\big(2\,\xi^3 - \xi^2 + 2\,\xi\big)\,,\\
&\mathrm{C}^{(1)} : && \rho_1(\xi) = \xi^2 - 1\,, && \sigma_1(\xi) = \frac{1}{3}\big(\xi^2 + 4\,\xi + 1\big)\,,\\
&\mathrm{C}^{(2)} : && \rho_2(\xi) = \xi^3 - \frac{9}{8}\,\xi^2 + \frac{1}{8}\,, && \sigma_2(\xi) = \frac{3}{8}\big(\xi^3 + 2\,\xi^2 - \xi\big)\,.
\end{aligned}$$

Korišćenjem Milneove šeme naći izraz za ocenu glavnog člana lokalne greške odsecanja prediktor-korektor metoda (tipa $\mathrm{P(EC)^m}$ ili $\mathrm{P(EC)^mE}$) i formirati prediktor-korektor metod korišćenjem

a) P i $\mathrm{C}^{(1)}$ u tipu PECE;

b) P i $\mathrm{C}^{(2)}$ u tipu PMECME.

**Rešenje.** Red $p$ i asimptotske konstante greške prediktora P i korektora C$^{(1)}$ i C$^{(2)}$ su date sa:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \ : \quad & p=4\,, \qquad C_5^* = \frac{14}{45}\,; \\ \mathrm{C}^{(1)} : \quad & p=4\,, \qquad C_5^{(1)} = -\frac{1}{90}\,; \\ \mathrm{C}^{(2)} : \quad & p=4\,, \qquad C_5^{(2)} = -\frac{1}{40}\,. \end{aligned}$$

S obzirom da prediktor P i bilo koji od korektora C$^{(1)}$ ili C$^{(2)}$, u kombinaciji prediktor-korektor metoda, imaju isti red, ispunjeni su uslovi za primenu Milneovog pravila, pa je glavni član lokalne greške odsecanja prediktor-korektor metoda tipa P(EC)$^{\mathrm{m}}$ ili P(EC)$^{\mathrm{m}}$E isti kao glavni član lokalne greške odsecanja korektora i dat je sa

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \cong \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big)$$

(videti [3, str. 51]).

Prema tome, kada imamo P i C$^{(1)}$ u prediktor-korektor metodu tipa P(EC)$^{\mathrm{m}}$ ili P(EC)$^{\mathrm{m}}$E, dobijamo

$$\begin{aligned} C_5^{(1)}h^5y^{(5)}(x_n) &\cong \frac{C_5^{(1)}}{C_5^* - C_5^{(1)}}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big) \\ &\cong -\frac{1}{29}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big)\,, \end{aligned}$$

a za prediktor-korektor metod sa P i C$^{(2)}$ je

$$\begin{aligned} C_5^{(2)}h^5y^{(5)}(x_n) &\cong \frac{C_5^{(2)}}{C_5^* - C_5^{(2)}}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big) \\ &\cong -\frac{9}{121}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big)\,. \end{aligned}$$

S obzirom da je P četvorokoračni, C$^{(1)}$ dvokoračni i C$^{(2)}$ trokoračni metod, dovedimo ih, formalno, na isti koračni broj, tj. neka svi metodi budu četvorokoračni. Imajući ovo u vidu i korišćenjem karakterističnih polinoma datih zadatkom imamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \ : \quad & y_{n+4} - y_n = \frac{4h}{3}\big(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}\big)\,, \\ \mathrm{C}^{(1)} : \quad & y_{n+4} - y_{n+2} = \frac{h}{3}\big(f_{n+4} + 4f_{n+3} + f_{n+2}\big)\,, \\ \mathrm{C}^{(2)} : \quad & y_{n+4} - \frac{9}{8}\,y_{n+3} + \frac{1}{8}\,y_{n+1} = \frac{3h}{8}\big(f_{n+4} + 2f_{n+3} - f_{n+2}\big)\,. \end{aligned}$$

a) Formirajmo pomoću P i $\mathrm{C}^{(1)}$ prediktor-korektor metod tipa PECE:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}: &\quad y_{n+4}^{[0]} - y_n^{[1]} = \frac{4h}{3}\big(2f_{n+3}^{[1]} - f_{n+2}^{[1]} + 2f_{n+1}^{[1]}\big)\,,\\
\mathrm{E}: &\quad f_{n+4}^{[0]} = f\big(x_{n+4}, y_{n+4}^{[0]}\big)\,,\\
\mathrm{C}: &\quad y_{n+4}^{[1]} - y_{n+2}^{[1]} = \frac{h}{3}\big(f_{n+4}^{[0]} + 4f_{n+3}^{[1]} + f_{n+2}^{[1]}\big)\,,\\
\mathrm{E}: &\quad f_{n+4}^{[1]} = f\big(x_{n+4}, y_{n+4}^{[1]}\big)\,.
\end{aligned}
$$

b) Formirajmo, sada, prediktor-korektor metod tipa PMECME pomoću P i $\mathrm{C}^{(2)}$:

$$
\mathrm{P}: \quad y_{n+4}^{[0]} - \hat{y}_n^{[1]} = \frac{4h}{3}\big(2\hat{f}_{n+3}^{[1]} - \hat{f}_{n+2}^{[1]} + 2\hat{f}_{n+1}^{[1]}\big)\,.
$$

Vrednost $y_{n+k}^{[0]}$ $(k=4)$, dobijenu primenom prediktora, na osnovu Milneove šeme možemo modifikovati (korigovati) na vrednost $\hat{y}_{n+k}^{[0]}$ (uopšte za prediktor-korektor metod tipa $\mathrm{PM(EC)^mME}$ ili $\mathrm{PM(EC)^mM}$), gde je

$$
\hat{y}_{n+k}^{[0]} = y_{n+k}^{[0]} + \frac{C_{p+1}^*}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}\big(y_{n+k-1}^{[m]} - y_{n+k-1}^{[0]}\big)\,,
$$

pa je, na osnovu ovoga, za naš slučaj

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}: &\quad \hat{y}_{n+4}^{[0]} = y_{n+4}^{[0]} + \frac{112}{121}\big(y_{n+3}^{[1]} - y_{n+3}^{[0]}\big)\,,\\
\mathrm{E}: &\quad \hat{f}_{n+4}^{[0]} = f\big(x_{n+4}, \hat{y}_{n+4}^{[0]}\big)\,,\\
\mathrm{C}: &\quad y_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{8}\,\hat{y}_{n+3}^{[1]} + \frac{1}{8}\,\hat{y}_{n+1}^{[1]} = \frac{3h}{8}\big(\hat{f}_{n+4}^{[0]} + 2\hat{f}_{n+3}^{[1]} - \hat{f}_{n+2}^{[1]}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Vrednost $y_{n+k}^{[m]}$ koja se dobija posle $m$ primena korektora (u našem slučaju je $m=1$, $k=4$) može se modifikovati (korigovati) korišćenjem Milneove šeme na vrednost $\hat{y}_{n+k}^{[m]}$, gde je

$$
\hat{y}_{n+k}^{[m]} = y_{n+k}^{[m]} + \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}\big(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}\big)\,,
$$

pa je, u našem slučaju, modifikacija korektora data sa

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}: &\quad \hat{y}_{n+4}^{[1]} = y_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{121}\big(y_{n+4}^{[1]} - y_{n+4}^{[0]}\big)\,;\\
\mathrm{E}: &\quad \hat{f}_{n+4}^{[1]} = f\big(x_{n+4}, \hat{y}_{n+4}^{[1]}\big)\,.
\end{aligned}
$$

**8.2.10.** Generalisati metod

$$y_{n+2} - y_n = 2h\, f_{n+1}$$

na vektorski oblik i primeniti ga za rešavanje problema

$$y'' = 2y\big(1 + 2x^2\big)\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

na segmentu [0, 0.5] sa korakom $h = 0.1$.

**Rešenje.** Lako nalazimo red datog metoda $p = 2$ i konstantu greške $C_3 = \dfrac{1}{3}$.

Ako generališemo dati metod na vektorski oblik, on postaje

$$\boldsymbol{y}_{n+2} - \boldsymbol{y}_n = 2h\, \boldsymbol{f}_{n+1} \tag{1}$$

i može se primeniti za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina prvog reda sa početnim uslovima (Cauchyev problem za sistem diferencijalnih jednačina prvog reda)

$$\begin{aligned} y_i' &= f_i(x;\, y_1\,, \dots\,, y_m) \\ y_i(x_0) &= y_{i0} \end{aligned} \qquad (i = 1, \dots, m),$$

koji se može predstaviti u vektorskom obliku

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,, \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0\,, \tag{2}$$

gde su

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x;\, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x;\, y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}.$$

Problem dat zadatkom možemo prevesti na sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} y' &= z\,, \\ z' &= 2y\big(1 + 2x^2\big), \qquad y(0) = 1, \quad z(0) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

pa ako ovaj sistem predstavimo u vektorskom obliku (2), tada je

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} z \\ 2y\big(1 + 2x^2\big) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ako metod (1) primenimo na (3), imajući u vidu (2) i (4), dobijamo

$$\begin{bmatrix} y_{n+2} \\ \\ z_{n+2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_n \\ \\ z_n \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ \\ 2y_{n+1}\big(1 + 2x_{n+1}^2\big) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix},$$

ili u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= y_n + 2h\, z_{n+1}\,, \\ z_{n+2} &= z_n + 4h\, y_{n+1}\big(1 + 2x_{n+1}^2\big), \qquad y_0 = 1,\ z_0 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

S obzirom da je korišćeni metod (1) dvokoračni, za njegovo „aktiviranje" je potrebno poznavati dve startne vrednosti, tj. $\boldsymbol{y}_0,\ \boldsymbol{y}_1$. Kako je $\boldsymbol{y}_0$ dato zadatkom, preostaje da još odredimo $\boldsymbol{y}_1$, na primer Taylorovim metodom. U Taylorovom metodu uzećemo članove zaključno sa članom koji sadrži drugi izvod funkcije, s obzirom da je metod (1) drugog reda, tj.

$$\begin{aligned} y_1 &= y(0) + y'(0)\, h + y''(0)\, \frac{h^2}{2}\,, \\ z_1 &= z(0) + z'(0)\, h + z''(0)\, \frac{h^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Na osnovu (3), dobijamo

$$\begin{aligned} &y(0) = 1\,, \quad y'(0) = z(0) = 0\,, \qquad\qquad y''(0) = 2y(0)\,(1 + 2\cdot 0^2) = 2\,, \\ &z(0) = 0\,, \quad z'(0) = 2y(0)(1 + 2\cdot 0^2) = 2\,, \quad z''(0) = 0, \end{aligned}$$

s obzirom da je $z'' = 2y'\big(1 + 2x^2\big) + 2y\cdot 4x$. Sada, za $h = 0.1$, na osnovu (6), sleduje

$$y_1 = 1.01\,, \qquad z_1 = 0.2\,.$$

Dakle, korišćenjem startnih vrednosti $y_0 = 1,\ z_0 = 0,\ y_1 = 1.01$ i $z_1 = 0.2$, na osnovu (5) dobijamo rezultate (zaokružene na tri decimale) koji su pregledno dati u tabeli. U poslednjoj koloni tabele je dato tačno rešenje problema.

| $k$ | $x_k$ | $z_k$ | $y_k$ | $y(x_k) = e^{x_k^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 0.000 | 1.000 | 1.000 |
| 1 | 0.1 | 0.200 | 1.010 | 1.010 |
| 2 | 0.2 | 0.413 | 1.040 | 1.041 |
| 3 | 0.3 | 0.649 | 1.093 | 1.094 |
| 4 | 0.4 | 0.928 | 1.170 | 1.174 |
| 5 | 0.5 | | 1.278 | 1.284 |

**Napomena.** Za probleme tipa

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_{00}, \quad y'(x_0) = y_{10},$$

postoji klasa višekoračnih metoda tipa

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}.$$

Jedan od najjednostavnijih metoda iz te klase je, na primer,

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} = y_n = h^2 f_{n+1},$$

a često se u primenama sreće i metod

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12}(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n),$$

poznat kao metod Numerova.

## 8.3. Metodi Runge-Kutta

**8.3.1.** Za metod Runge-Kutta

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{10}\left(k_1 + 5k_2 + 4k_3\right), \\
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f\Big(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1\Big), \\
k_3 &= f\Big(x_n + \frac{5}{6}h, y_n - \frac{5}{12}hk_1 + \frac{5}{4}hk_2\Big),
\end{aligned}$$

naći red. U slučaju kada $f$ ne zavisi od $y$, na koju se kvadraturnu formulu svodi ovaj metod?

**Rešenje.** Opšti eksplicitni metod Runge-Kutta za rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

je dat sa

$$y_{n+1} - y_n = h\Phi(x_n, y_n, h), \tag{2}$$

gde su

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\Phi(x,y,h)=\sum_{i=1}^{m} c_i k_i,\\
&k_1=f(x,y),\\
&k_i=f(x+a_i h, y+b_i h),\quad i=1,2,\dots,m,\\
&a_i=\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij},\quad b_i=\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}k_j,\quad i=1,2,\dots,m.
\end{aligned}
$$

Za metod Runge-Kutta dat ovim zadatkom imamo $m=3$ i

$$
(4)\qquad \Phi(x,y,h)=\frac{1}{10}(k_1+5k_2+4k_3).
$$

S obzirom na Taylorov razvoj

$$
y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+\frac{h^3}{3!}y'''(x)+O(h^4),
$$

imamo

$$
(5)\qquad \Phi_T(x,y,h)=\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=y'(x)+\frac{h}{2}y''(x)+\frac{h^2}{6}y'''(x)+O(h^3).
$$

Metod (2) je reda $p$ ako je $p$ najveći ceo broj za koji važi

$$
\Phi_T(x,y,h)-\Phi(x,y,h)=O(h^p).
$$

Poznato je (videti [3, str. 67]) da ako sa $\overline{p}(m)$ označimo maksimalni mogući red metoda (2), tada je

$$
\begin{aligned}
\overline{p}(m)&=m &&(m=1,2,3,4)\\
&=m-1 &&(m=5,6,7)\\
&=m-2 &&(m=8,9)\\
&\le m-2 &&(m=10,11,\dots).
\end{aligned}
$$

Zato, u ovom slučaju, možemo zaključiti da je $p\le 3$.

Nađimo razvoj $\Phi_T(x,y,h)$ po stepenima od $h$. Korišćenjem Mongeovih oznaka za parcijalne izvode, na osnovu (1) imamo

$$
\begin{aligned}
y''&=\frac{d}{dx}\,y'=\frac{d}{dx}\,f(x,y)=f_x+ff_y=F,\\
y'''&=\frac{d}{dx}\,(f_x+ff_y)=f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy}+f_y(f_x+ff_y)=G+f_yF,
\end{aligned}
$$

gde smo stavili $G = f_{xx} + 2ff_{yx} + f^2 f_{yy}$. Tada, na osnovu (5) dobijamo

$$\Phi_T(x, y, h) = f + \frac{1}{2}Fh + \frac{1}{6}(G + f_y F)h^2 + O(h^3). \tag{6}$$

Potražimo sada razvoj funkcije $\Phi(x, y, h)$, date sa (4), po stepenima od $h$. Imajući u vidu da je $k_1 = f$ i razvijanjem funkcije $k_2$ u Taylorov red u okolini tačke $(x, y)$, dobijamo

$$\begin{aligned} k_2 &= f\Big(x + \frac{1}{3}h, y + \frac{1}{3}hf\Big) \\ &= f + \frac{1}{3}hf_x + \frac{1}{3}hff_y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}h^2 f_{xx} + \frac{2}{9}h^2 ff_{xy} + \frac{1}{9}h^2 f^2 f_{yy} + O(h^3)\right) \\ &= f + \frac{1}{3}Fh + \frac{1}{18}Gh^2 + O(h^3). \end{aligned} \tag{7}$$

Slično, razvijanjem funkcije

$$k_3 = f\Big(x + \frac{5}{6}h, y - \frac{5}{12}hk_1 + \frac{5}{4}hk_2\Big)$$

u Taylorov red u okolini tačke $(x, y)$, a s obzirom da je na osnovu (7)

$$\begin{aligned} -\frac{5}{12}hk_1 + \frac{5}{4}hk_2 &= -\frac{5}{12}hf + \frac{5}{4}hf + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}h^2 F + O(h^3) \\ &= \frac{5}{6}fh + \frac{5}{12}Fh^2 + O(h^3), \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} k_3 &= f + \frac{5}{6}hf_x + \left(\frac{5}{6}fh + \frac{5}{12}Fh^2\right) f_y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 f_{xx} + \frac{25}{18}h^2 ff_{xy} + \frac{25}{36}h^2 f^2 f_{yy}\right) + O(h^3) \\ &= f + \frac{5}{6}Fh + \left(\frac{5}{12}Ff_y + \frac{25}{72}G\right) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Zamenom dobijenih izraza za $k_1, k_2, k_3$ u (4), dobijamo

$$\Phi(x, y, h) = f + \frac{1}{10}\Big(\frac{5}{3}F + \frac{10}{3}F\Big)h + \frac{1}{10}\Big(\frac{5}{18}G + \frac{5}{3}Ff_y + \frac{25}{18}G\Big)h^2 + O(h^3),$$

tj.

$$\Phi(x, y, h) = f + \frac{1}{2}Fh + \frac{1}{6}(G + Ff_y)h^2 + O(h^3). \tag{8}$$

Na osnovu (6) i (8) imamo

$$\Phi_T(x, y, h) - \Phi(x, y, h) = O(h^3),$$

a kako smo prethodno već zaključili da je red metoda dat zadatkom $p \le 3$, sada možemo da tvrdimo da je $p = 3$.

U slučaju kada $f$ ne zavisi od $y$, tj. kada je (1) oblika $y' = f(x)$, korišćenjem metoda Runge-Kutta datog zadatkom, dobijamo kvadraturnu formulu

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} f(x)\,dx &= \int_a^{a+h} y'(x)\,dx = y(a+h) - y(a)\\ &\cong \frac{h}{10}\Big[f(a) + 5f\Big(a + \frac{h}{3}\Big) + 4f\Big(a + \frac{5}{6}h\Big)\Big].\end{aligned}$$

**8.3.2.** Izvesti opštu formulu Runge-Kutta drugog reda, oblika

$$(1) \qquad y_0 = Y, \quad y_{n+1} = y_n + h(A(a)k_1 + B(a)k_2), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

gde su

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + ah, y_n + ahk_1) \quad (0 < a \le 1),$$

za rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = Y.$$

Primenom formule (1), za slučaj $A(a) = B(a)$, odrediti $y(0.5)$ za problem

$$y' = 2xy - 2x^2 + 1, \quad y(0) = 1,$$

uzimajući $h = 0.1$.

**Rešenje.** Na osnovu (1) imamo

$$\Phi(x_n, y_n, h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = A(a)k_1 + B(a)k_2.$$

Imajući u vidu da je $k_1 = f$, razvijanjem funkcije $k_2$ u Taylorov red u okolini tačke $(x_n, y_n)$, dobijamo

$$k_2 = f(x_n + ah, y_n + ahf) = f + ahf_x + ahff_y + O(h^2) = f + aFh + O(h^2),$$

gde je $F = f_x + ff_y$,. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
\Phi(x_n, y_n, h) &= A(a)f + B(a)(f + aFh) + O(h^2) \\
&= (A(a) + B(a))f + aB(a)Fh + O(h^2).
\end{aligned} \tag{2}
$$

S druge strane, slično kao u prethodnom zadatku, dobijamo

$$\Phi_T(x_n, y_n, h) = \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} = f + \frac{1}{2}Fh + O(h^2).$$

Na osnovu (2) i (3) imamo

$$\Phi_T(x_n, y_n, h) - \Phi(x_n, y_n, h) = (1 - A(a) - B(a))f + (1/2 - aB(a))Fh + O(h^2),$$

odakle zaključujemo da treba nametnuti uslove

$$1 - A(a) - B(a) = 0, \qquad \frac{1}{2} - aB(a) = 0 \tag{4}$$

da bi metod (1) bio drugog reda. Rešavanjem sistema jednačina (4) dobijamo

$$A(a) = \frac{2a - 1}{2a}, \quad B(a) = \frac{1}{2a}.$$

Iz uslova $A(a) = B(a)$ sleduje $a = 1$, tj. $A(a) = B(a) = 1/2$, pa u tom slučaju metod (1) postaje

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2), \tag{5}$$

gde su

$$k_1 \equiv k_1(x_n, y_n) = f(x_n, y_n), \quad k_2 \equiv k_2(x_n, y_n) = f(x_n + h, y_n + hk_1).$$

Za Cauchyev problem dat zadatkom $y' = 2xy - 2x^2 + 1$, $y(0) = 1$ imamo da je $f(x, y) = 2xy - 2x^2 + 1$. Uzimajući $h = 0.1$, na osnovu (5) dobijamo rezultate (zaokružene na četiri decimale), prikazane u tabeli.

| $n$ | $x_n$ | $k_1(x_n, y_n)$ | $k_2(x_n, y_n)$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 1.0000 | 1.2000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | 0.1 | 1.2020 | 1.4121 | 1.1100 | 1.1101 |
| 2 | 0.2 | 1.4163 | 1.6494 | 1.2407 | 1.2408 |
| 3 | 0.3 | 1.6564 | 1.9277 | 1.3940 | 1.3942 |
| 4 | 0.4 | 1.9386 | 2.2669 | 1.5731 | 1.5735 |
| 5 | 0.5 | | | 1.7835 | 1.7840 |

U poslednjoj koloni tabele date su približne vrednosti tačnog rešenja $y(x) = e^{x^2} + x$ ovog test problema, za $x = x_n$.

**8.3.3.** Standardni metod Runge-Kutta četvrtog reda

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2),\\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

za rešavanje Cauchyevog problema prvog reda $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, generalisati na vektorski oblik pa ga primeniti na rešavanje Cauchyevog problema za sistem jednačina prvog reda

$$
\begin{aligned}
y' &= xyz, \quad y(1) = \frac{1}{3},\\
z' &= \frac{xy}{z}, \quad z(1) = 1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

na segmentu [1, 2.5] uzimajući za korak integracije $h = 0.01$, a tabelirati rešenje u tačkama $x_k = 1 + 0.1 \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, 15$.

**Rešenje.** Cauchyev problem za sistem od $m$ diferencijalnih jednačina prvog reda

$$y_i' = f_i(x; y_1, \ldots, y_m), \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

može se predstaviti u vektorskom obliku

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{3}$$

gde su

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x; y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x; y_1, \ldots, y_m) \end{bmatrix}.$$

Primetimo da se Cauchyev problem za diferencijalnu jednačinu $m$-tog reda može prevesti na Cauchyev problem za sistem od $m$ diferencijalnih jednačina prvog reda (videti zadatak 8.1.5).

Metodi Runge-Kutta se formalno generališu na vektorski oblik i služe za rešavanje Cauchyevog problema (3), pa u slučaju metoda (1) datog zadatkom imamo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{n+1} - \boldsymbol{y}_n &= \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4),\\
\boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{y}_n),\\
\boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(x_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1),\\
\boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}(x_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2),\\
\boldsymbol{k}_4 &= \boldsymbol{f}(x_n + h, \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{k}_3).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ako Cauchyev problem (2) predstavimo u vektorskom obliku (3), tada je

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xyz \\ xy/z \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

a metod Runge-Kutta (4) u ovom slučaju je dat sa

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\left(\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} k_3 \\ l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_4 \\ l_4 \end{bmatrix}\right),\\
&\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_n, y_n, z_n) \\ f_2(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1, z_n + \frac{h}{2}l_1\Big) \\ f_2\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1, z_n + \frac{h}{2}l_1\Big) \end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} k_3 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2, z_n + \frac{h}{2}l_2\Big) \\ f_2\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2, z_n + \frac{h}{2}l_2\Big) \end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{k}_4 = \begin{bmatrix} k_4 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3) \\ f_2(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $y(x_k)$ | $z_k$ | $z(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 0.3333333 | 0.3333333 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 1 | 1.1 | 0.3709342 | 0.3709341 | 1.0362694 | 1.0362694 |
| 2 | 1.2 | 0.4188979 | 0.4188979 | 1.0791367 | 1.0791367 |
| 3 | 1.3 | 0.4808936 | 0.4808936 | 1.1299436 | 1.1299435 |
| 4 | 1.4 | 0.5623944 | 0.5623943 | 1.1904763 | 1.1904762 |
| 5 | 1.5 | 0.6718182 | 0.6718181 | 1.2631581 | 1.2631578 |
| 6 | 1.6 | 0.8225904 | 0.8225905 | 1.3513514 | 1.3513515 |
| 7 | 1.7 | 1.0370675 | 1.0370678 | 1.4598541 | 1.4598541 |
| 8 | 1.8 | 1.3544686 | 1.3544689 | 1.5957446 | 1.5957447 |
| 9 | 1.9 | 1.8481333 | 1.8481344 | 1.7699113 | 1.7699116 |
| 10 | 2.0 | 2.6666656 | 2.6666667 | 1.9999998 | 2.0000000 |
| 11 | 2.1 | 4.1441259 | 4.1441321 | 2.3166018 | 2.3166029 |
| 12 | 2.2 | 7.1444836 | 7.1444917 | 2.7777767 | 2.7777779 |
| 13 | 2.3 | 14.3993673 | 14.3994160 | 3.5087693 | 3.5087738 |
| 14 | 2.4 | 37.7629280 | 37.7631035 | 4.8387012 | 4.8387108 |
| 15 | 2.5 | 170.6634674 | 170.6666718 | 7.9999280 | 8.0000000 |

Korišćenjem metoda (6), a s obzirom da je na osnovu (5), $y_0 = 1/3$, $z_0 = 1$, $f_1(x, y, z) = xyz$, $f_2(x, y, z) = xy/z$, uzimajući $h = 0.01$, dobijamo rezultate prikazane u tabeli za $x = x_k = 1 + 0.1 \cdot k$ $(k = 0, 1, \dots, 15)$. Poređenja radi, u tabeli su date i odgovarajuće vrednosti za tačna rešenja Cauchyevog problema (2) koja su data sa

$$y(x) = \frac{72}{(7-x)^3}, \quad z(x) = \frac{6}{7-x^2}.$$